Chapitre 2
Etude des circuits linéaires ; théorèmes généraux

2.1. Les éléments des circuits linéaires

Rappel : un circuit linéaire est un circuit ne comportant que des composants (ou dipôles) linéaires.

Un composant est linéaire si la relation entre la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ est une relation affine ou une équation différentielle à coefficients constants.

2.1.1. Les difficultés de la modélisation

Voir explication en cours.

2.1.2. Les éléments dipolaires passifs

2.1.2.1. Le modèle de la résistance

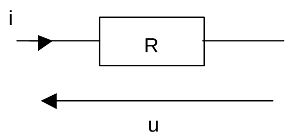

Fig.2.1.

La relation liant le courant et la tension est une relation affine :

$$u = Ri.$$

L'unité de la résistance R est l'**ohm**, notée $(\quad = V.A^{-1})$

2.1.2.2. Les modèles du condensateur

- Le condensateur idéal

La relation liant i et u est une équation différentielle :

$$i = C\frac{du}{dt}.$$

C est la capacité du condensateur ; son unité est le **Farad** notée F.

- Le condensateur "réel "

En réalité, un condensateur, même isolé, se décharge lentement. Ceci est dû aux électrons qui parviennent à passer d'une armature à l'autre, l'isolant séparant ces armatures ne pouvant pas être parfait. Ce phénomène peut être modélisé par une résistance placée en parallèle d'un condensateur idéal, appelée résistance de fuite, notée R_f.

La relation entre i et u est alors

$$i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_f}$$

Le condensateur idéal est le cas limite d'un condensateur réel pour lequel la résistance de fuite tend vers l'infini.

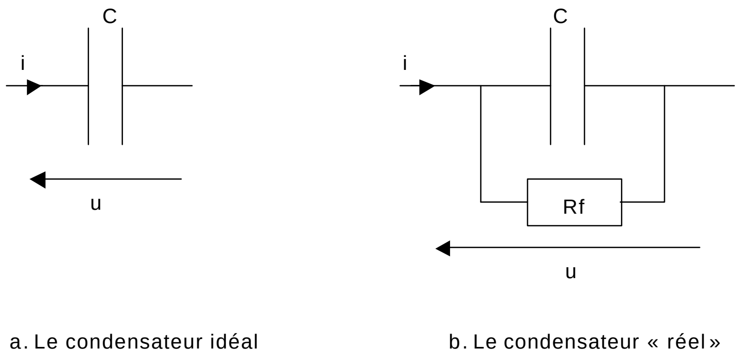

Fig.2.2.

2.1.2.3. Les modèles de la bobine

- La bobine idéale

La relation liant i et u est une équation différentielle :

$$u = L\frac{di}{dt}.$$

L est l'inductance de la bobine ; son unité est le **Henry**, notée H.

- La bobine "réelle "

En pratique, la bobine est constituée d'un enroulement de fils ; ces fils ont une résistance au passage du courant. Ce phénomène peut-être modélisé par une association série d'une résistance r avec une bobine idéale d'inductance L :

$$u = L\frac{di}{dt} + ri$$

La bobine idéale est le cas limite d'une bobine réelle pour laquelle la résistance tend vers 0.

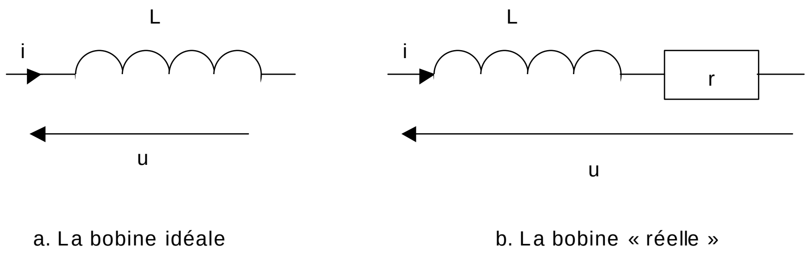

Fig.2.3.

2.1.3. Les éléments dipolaires actifs

2.1.3.1. Les modèles du générateur de tension

- Le générateur de tension idéal
Un générateur de tension idéal impose une tension e déterminée à ses bornes :

$$u(t) = e$$

- Le générateur de Thévenin (ou générateur de tension "réel")
En réalité, un générateur de tension possède toujours une résistance interne notée R_g. Le modèle que l'on peut en proposer est le suivant (voir figure 2.4) :

$$u(t) = e - R_g i.$$

Le générateur de tension idéal est le cas limite d'un générateur réel (de Thévenin) pour lequel la résistance interne tend vers 0.

2.1.3.2. Les modèles du générateur de courant

- Le générateur de courant réel
Un générateur de courant idéal impose un courant i_0 déterminé à ses bornes :

$$i(t) = i_0$$

- Le générateur de Norton (ou générateur de courant "réel")
En réalité, un générateur possède toujours une résistance interne notée R_g. Le modèle que l'on peut en proposer est le suivant (voir figure 2.5) :

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 - \frac{u}{R_g} \\ &= i_0 - G_g u. \end{aligned}$$

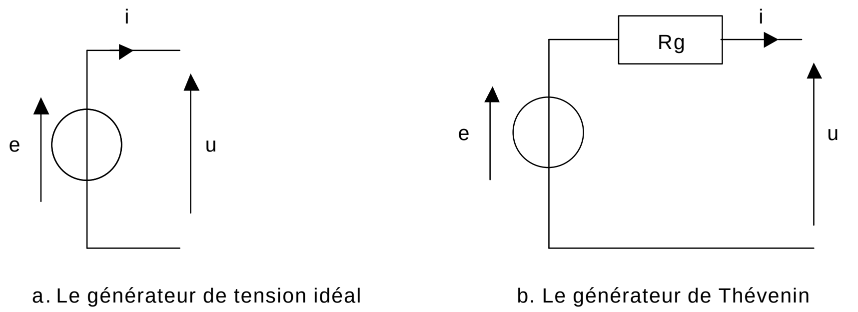

Fig.2.4.

Le générateur idéal de courant est le cas limite d'un générateur réel (de Norton) pour lequel la résistance interne tend vers l'infini.

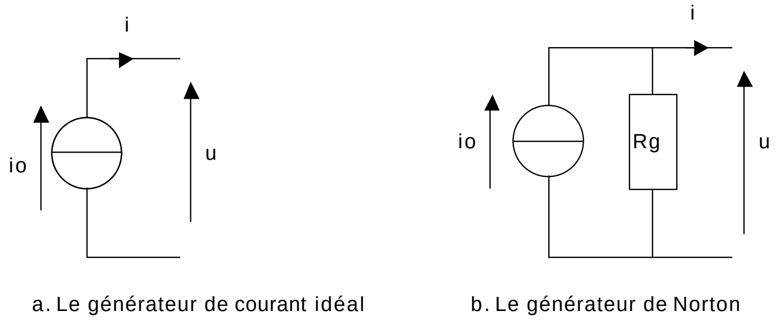

Fig.2.5.

2.2. Les théorèmes généraux des circuits linéaires

Aborder la résolution de circuits linéaires à l'aide des lois de Kirchhoff seulement (loi des noeuds et des mailles) est en théorie suffisante, mais en pratique souvent complexe, dès que le circuit dépasse les 3 ou 4 mailles ; le nombre d'inconnues (et d'équations !) se multiplie alors. Il existe des méthodes matricielles pour résoudre ce genre de problème (qui sera vue ultérieurement en math).

L'objectif de la fin de ce chapitre est de proposer d'autres méthodes de résolution des circuits électroniques utilisant de nouveaux théorèmes (qui sont souvent des conséquences des lois de Kirchhoff).

2.2.1. Les associations série

Deux dipôles sont dits en **série** s'ils sont **parcourus par le même courant**.

2.2.1.1. L'association en série de résistances

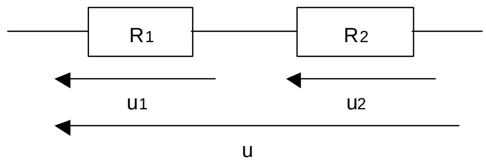

Fig.2.6.

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + u_2 \\
&= R_1 i + R_2 i \\
&= (R_1 + R_2)\, i = R_{eq} i.
\end{aligned}
$$

L'association des 2 résistances en série est donc équivalente à une résistance $R_{eq} = R_1 + R_2$. Ce résultat se généralise pour l'association de N résistances placées en série :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k.$$

2.2.1.2. L'association en série de bobines idéales

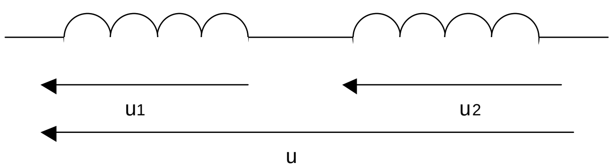

Fig.2.7.

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

L'association des 2 bobines idéales en série est donc équivalente à une bobine idéale d'inductance $L_{eq} = L_1 + L_2$.

Ce résultat se généralise pour l'association de N bobines en série :

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^{N} L_k.$$

2.2.1.3. L'association en série de condensateurs idéaux

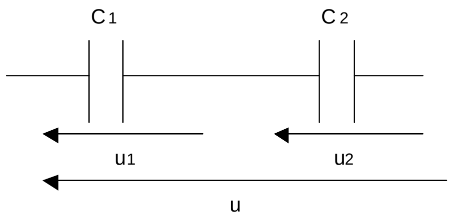

Fig.2.8.

$$u = u_1 + u_2$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} \\ &= \frac{1}{C_1} i + \frac{1}{C_2} i \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i = \frac{1}{C_{eq}} i. \end{aligned}$$

L'association des 2 condensateurs idéaux en série est donc équivalente à un condensateur idéal dont la capacité C_{eq} vérifie $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2$.

Ce résultat se généralise pour l'association de N condensateurs en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}.$$

2.2.1.4. L'association en série de générateurs

Deux générateurs de tension placés en série permettent d'additionner la tension aux bornes de chacun d'eux. Il convient toutefois en TP de ne pas oublier les "problèmes de masses" éventuels !

Par contre, associer deux générateurs de courant en série n'a aucun sens : cela revendrait à imposer deux courants différents dans un même fil !

2.2.1.5. Le pont diviseur de tension

Reprenons l'association de résistances en série (voir figure 2.6).

$$u_1 = R_1 i \qquad \text{et} \qquad u_2 = R_2 i;$$

$$u = (R_1 + R_2)\, i$$

donc

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u.$$

C'est le pont diviseur de tension qui peut se généraliser, pour N résistances placées en série :

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + ... + R_N} u$$

Le pont diviseur de tension peut s'énoncer comme suit : *une tension U aux bornes de résistances placées en série se partage aux bornes de chacune de ces résistances proportionnellement à la valeur de chaque résistance.*

Attention ! Le pont diviseur de tension ne peut s'appliquer que si les 2 dipôles sont en série, c'est-à-dire qu'aucun courant ne doit partir dans une autre branche entre R_1 et R_2.

2.2.1.6. La caractéristique d'une association de deux dipôles en série

Vu en cours

2.2.2. Les associations en parallèle (ou dérivation)

Deux dipôles sont dits en **parallèle** (ou en dérivation) s'ils sont reliés aux deux mêmes noeuds, donc **soumis à la même tension**.

2.2.2.1. L'association en parallèle de résistances

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= \frac{1}{R_1} u + \frac{1}{R_2} u \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u = \frac{1}{R_{eq}} u. \end{aligned}$$

L'association des 2 résistances en parallèle est donc équivalente à une résistance telle que $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$.

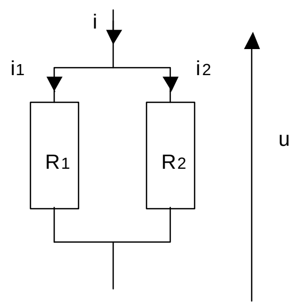

Fig.2.9.

Ce résultat se généralise pour l'association de N résistances placées en série :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}.$$

2.2.2.2. L'association en parallèle de bobines idéales

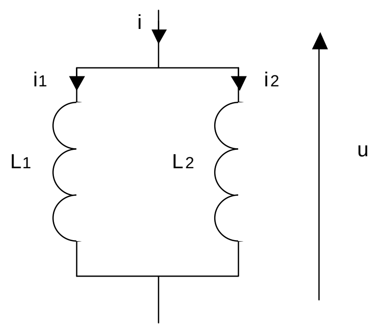

Fig.2.10.

$$i = i_1 + i_2$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{1}{L_1}u + \frac{1}{L_2}u \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) u = \frac{1}{L_{eq}}u.\end{aligned}$$

L'association des 2 bobines idéales placées en parallèle est donc équivalente à une bobine idéale dont l'inductance L_{eq} vérifie $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$.

Ce résultat se généralise pour l'association de N bobines en parallèle :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}.$$

2.2.2.3. L'association en parallèle de condensateurs idéaux

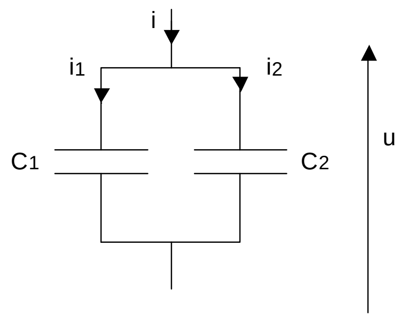

Fig.2.11.

$$\begin{aligned}i &= i_1 + i_2 \\ &= C_1\frac{du}{dt} + C_2\frac{du}{dt} \\ &= (C_1 + C_2)\frac{du}{dt} = C_{eq}\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

L'association des 2 condensateurs idéaux en parallèle est donc équivalente à un condensateur de capacité $C_{eq} = C_1 + C_2$.

Ce résultat se généralise pour l'association de N condensateurs en série :

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{N} C_k.$$

2.2.2.4. L'association en parallèle de générateurs

Deux générateurs de courant placés en parallèle permettent d'additionner les courants de ces générateurs.

Par contre, associer deux générateurs de tension en parallèle n'a aucun sens : cela revendrait à imposer deux tensions différentes à des mêmes bornes !

2.2.2.5. Le pont diviseur de courant

Reprenons l'association de résistances en série (voir figure 2.9).

$$i_1 = \frac{1}{R_1}u \qquad \text{et} \qquad i_2 = \frac{1}{R_2}u;$$

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u$$

donc

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2}i \qquad \text{et} \qquad i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2}i.$$

C'est le pont diviseur de tension qui peut se généraliser, pour N résistances placées en série :

$$i_k = \frac{1/R_k}{1/R_1 + 1/R_2 + ... + 1/R_N}i$$

Le pont diviseur de courant peut s'énoncer comme suit : *un courant i traversant des résistances placées en parallèle se partage dans chacune de ces résistances inversement proportionnellement à la valeur de chaque résistance.*

2.2.2.6. La caractéristique d'une association de deux dipôles en parallèle

Vu en cours

2.2.3. Le théorème de Millman

Le théorème de Millman est tout simplement **la loi des noeuds exprimée en terme de potentiels**.

La loi des noeuds en A est (voir figure 2.12) :

$$i_1 + i_2 + i_3 + ... = 0$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1}u_1 + \frac{1}{R_2}u_2 + \frac{1}{R_3}u_3 + ... &= 0\\ \frac{V_A - V_{B1}}{R_1} + \frac{V_A - V_{B2}}{R_2} + \frac{V_A - V_{B3}}{R_3} + ... &= 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{V_{B1}}{R_1} + \frac{V_{B2}}{R_2} + \frac{V_{B3}}{R_3} + ... = V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ...\right). \qquad (2)$$

Le théorème de Millman peut être exprimé sous l'écriture (1) ou sous la forme (2).

Ce théorème peut être utile pour limiter les inconnues lors d'une résolution. Si l'objectif est de calculer une tension, l'utilisation de la loi des mailles en plus du théorème de Millman à différents noeuds permet de n'introduire que des tensions sans jamais faire intervenir un courant : le nombre d'inconnues est alors (théoriquement) divisée par deux.

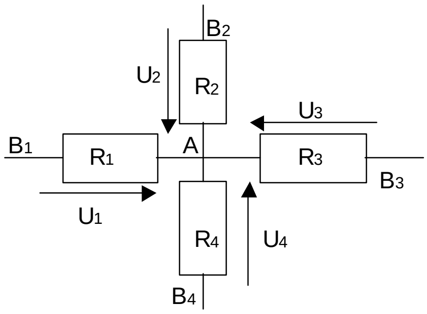

Fig.2.12.

2.2.4. Le théorème de superposition

2.2.4.1. Enoncé du théorème

En régime permanent, l'intensité qui parcourt les dipôles constituants un réseau linéaire est la somme des intensités obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources, sauf une, sont passivées.

De même, en régime permanent, la tension aux bornes de dipôles constituants un réseau linéaire est la somme des tensions obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources, sauf une, sont passivées.

En d'autres termes, s'il l'on recherche par exemple la tension U aux bornes d'un dipôle, dans un circuit contenant 3 sources (1), (2) et (3), on peut dans un premier temps " éteindre " (ou plutôt passiver) les générateurs (2) et (3) en ne laissant allumé que (1) et calculer U_1 aux bornes du dipôle. L'opération est recommencée en ne laissant allumé que (1) (avec (1) et (2) passivés) qui donne U_1 aux bornes du dipôle considéré ; puis l'opération est recommencée avec (3) seul donnant U_3. La tension recherchée quand tous les dipôles sont allumés en même temps est $U = U_1 + U_2 + U_3$.

2.2.4.2. Que signifie passiver un générateur ?

Passiver un générateur signifie :

- pour un générateur de tension : rendre la tension nulle, c'est-à-dire remplacer le générateur par un fil ;
- pour un générateur de courant : rendre le courant nul, c'est-à-dire remplacer le générateur par un interrupteur ouvert.

Remarque 2.1 *Sur les schémas, passiver une source revient à "enlever le cercle" du générateur (voir explication en classe).*

2.2.5. Les théorèmes de Thévenin et de Norton

Ces théorèmes sont désormais hors programmes, bien qu'ils soient de puissants outils pour simplifier des réseaux complexes. Le principe en est rapidement donné en classe.