Chapitre 3
Les régimes de fonctionnement de quelques circuits linéaires

Le chapitre précédent avait pour objet l'étude de circuits résistifs alimentés par des sources de tension ou de courant **continues**. Par contre la présence de condensateur(s) et de bobine(s) est généralement liée à un courant (ou une tension) **variable dans le temps**. Nous allons voir ici comment se comporte le signal en fonction du temps dans un tel cas.

3.1. Etude des régimes libres

Le régime libre est le régime observé quand toutes les sources sont éteintes. Des composants passifs et linéaires forment un circuit dans lequel se trouve initialement de l'énergie sous forme de tension (dans un condensateur) ou de courant (dans une bobine). L'objectif est ici d'étudier l'évolution des tensions et des courants dans le circuit, pour des conditions initiales données (sur i et u).

3.1.1. Le régime libre d'un circuit RC

3.1.1.1. Position du problème

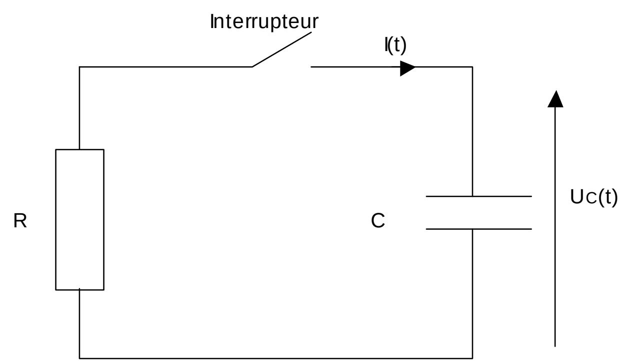

Fig.3.1. Circuit RC

Soit un circuit composé d'une résistance, d'un condensateur et d'un interrupteur. Les conditions initiales sont les suivantes : l'interrupteur est ouvert (donc empêche le courant de passer) et le condensateur est chargé q_o. A $t = 0$, l'interrupteur est fermé, ce qui permet ensuite au courant de passer donc au condensateur de se décharger.

L'objectif de ce paragraphe est le suivant :

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ aux bornes du condensateur ;
2. donner une solution de $u_c(t)$ pour cette équation différentielle ;
3. en déduire également l'évolution $i_c(t)$ dans le circuit ;
4. effectuer un bilan énergétique.

3.1.1.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit RC ne comporte qu'une maille. La tension est identique aux bornes de la résistance et du condensateur. Il vient donc :

$$u_C = -Ri = -R\left(C\frac{du_C}{dt}\right)$$

soit

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0. \tag{1}$$

C'est l'équation différentielle à résoudre pour obtenir $u_c(t)$.

Remarque 3.1 *L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du 1^{ier} ordre : le circuit est lui-même dit "linéaire du premier ordre".*

RC est homogène à un temps On pose $\tau = RC$. Ce temps intervient dans l'équation différentielle comme grandeur caractéristique. On appelle ainsi $\tau = RC$ le temps **caractéristique du circuit RC** (ou **temps de relaxation**).

3.1.1.3. Solution

La solution de l'équation différentielle (1)est :

$$u_C(t) = A\exp(-t/\tau).$$

Il reste à déterminer la constante A qui est donnée par les conditions initiales :

à $t = 0$, $u_C(t = 0+) = q_0/C$ donc $A = q_0/C$.

La solution est donc finalement :

$$u_C(t) = \frac{q_0}{C}\exp(-t/\tau).$$

Remarque 3.2 *L'équation différentielle étant du premier ordre, seule une condition initiale suffit pour déterminer la solution.*

Remarque 3.3 *La tangente à l'origine de la courbe coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$. (Démonstration donnée en cours)*

Remarque 3.4 *Le signal $u_C(t)$ tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini (le condensateur se décharge). On peut considérer que le condensateur est quasiment déchargé à t' quand il ne reste plus que 1% de la tension initiale à ses bornes :*

$$u_C(t') = \frac{1}{100}\frac{q_0}{C} = \frac{q_0}{C}\exp(-t'/\tau)$$

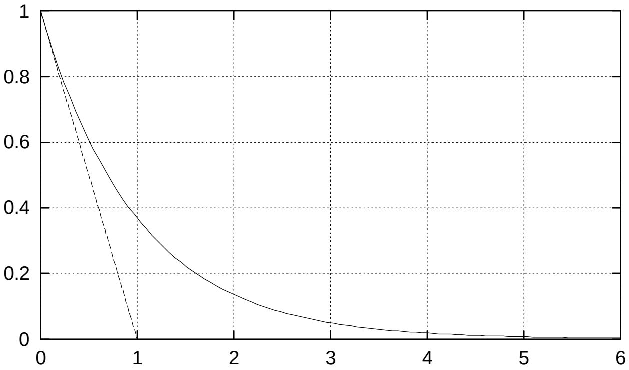

Fig.3.2. Décharge du condensateur : tension en fonction du temps. Les échelles sont normalisées : $u_C(t)/(q_0/C)$ en ordonnée, et t/τ en abscisse.

soit

$$\begin{aligned} \exp(-t'/\tau) &= \frac{1}{100}, \\ t' &= \tau \ln(100) \\ t' &\simeq 4,6\tau. \end{aligned}$$

Il faut 4 *à* 5τ *pour que le condensateur se décharge.*

Ensuite, le calcul du courant $i(t)$ s'effectue simplement en écrivant

$$i = -\frac{u_C}{R} = -\frac{q_0}{RC}\exp(-t/\tau).$$

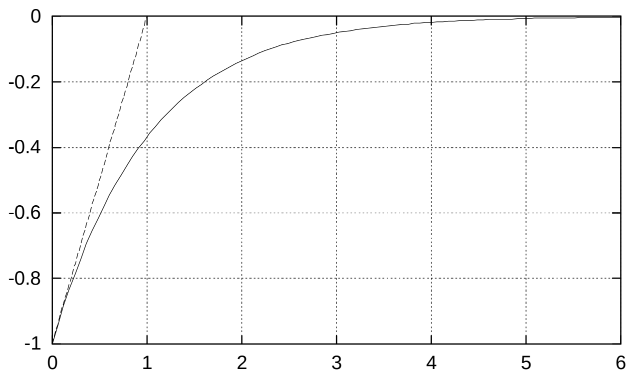

Fig.3.3. Courant en fonction du temps. Les échelles sont normalisées : $i(t)RC/q_0$ en ordonnée, et t/τ en abscisse.

Remarque 3.5 *La courbe* 3.2 *est continue : pour* $t < 0$, $u_C = q_0/C$ *puis décroît de cette* *valeur après $t = 0$. Ceci était prévisible : la tension aux bornes du condensateur est toujours continue dans le temps.*

Remarque 3.6 *La courbe 3.3 est discontinue : pour $t < 0$, $i_C = 0$ puis passe subitement à $-q_0/(RC)$ à $t = 0^+$. Il n'y a pas de présence de bobine dans le circuit : rien n'empêche le courant d'être discontinu dans le temps.*

3.1.1.4. Etude énergétique

La méthode consiste à faire apparaître une grandeur homogène à une énergie ou une puissance. On sait qu'une puissance est homogène à $u * i$: on peut donc obtenir simplement une égalité entre les différentes puissances soit en écrivant une loi des mailles (avec u) que l'on multiplie par i, soit une loi des noeuds (avec i) que l'on multiplie par u. On écrit ici la loi des mailles appliquée à l'unique maille présente :

$$u_C + Ri = 0.$$

La multiplication par le courant i donne donc un bilan de puissance :

$$\begin{aligned} i.u_C + Ri^2 &= 0 \\ \left(C\frac{du_C}{dt}\right)u_C &= -Ri^2 \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = -Ri^2.$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : l'énergie $\left(1/2Cu_C^2\right)$ perdue par le condensateur par unité de temps est égale à la puissance dissipée par la résistance $\left(-Ri^2\right)$ (sous forme de chaleur par effet Joule).

3.1.2. Régime libre d'un circuit RL

3.1.2.1. Position du problème

Soit un circuit composé d'une résistance et d'une bobine. On part des conditions initiales suivantes : un générateur de courant i_0 a été placé aux bornes de la bobine : un courant i_o circule alors dans la bobine. A $t = 0$, l'interrupteur est ouvert, ce qui revient à enlever le générateur du circuit. Le courant de la bobine va alors passer dans la résistance et être "freiné" par la résistance. L'énergie contenue dans la bobine au départ va progressivement être dissipée dans la résistance.

L'objectif de ce paragraphe est le suivant :

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ dans la bobine ;
2. donner une solution de l'évolution $i(t)$ dans le circuit ;
3. en déduire l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine ;
4. effectuer un bilan énergétique.

3.1.2.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit RL ne comporte qu'une maille. La tension est identique aux bornes de la résistance et de la bobine. Il vient donc :

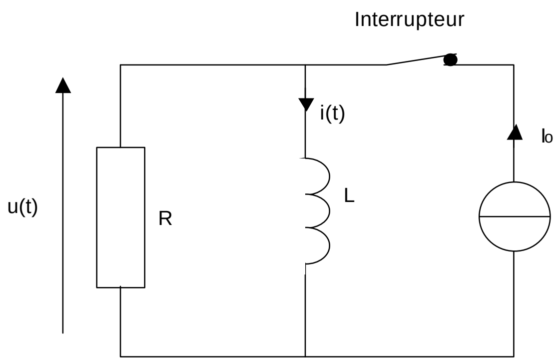

Fig.3.4. Circuit RL

$$u = -Ri = L\frac{di}{dt}$$

soit

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \tag{2}$$

C'est l'équation différentielle à résoudre pour obtenir $i(t)$.

Remarque 3.7 *L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du 1^{ier} ordre : le circuit est lui-même dit "linéaire du premier ordre".*

R/L est homogène à l'inverse d'un temps On pose $\tau = L/R$. Ce temps intervient dans l'équation différentielle comme grandeur caractéristique. On appelle $\tau = L/R$ **le temps caractéristique** du circuit RL (ou **temps de relaxation**).

3.1.2.3. solution

La solution de l'équation différentielle

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0. \tag{3}$$

est :

$$i(t) = B\exp(-t/\tau).$$

Il reste à déterminer B qui est donnée par les conditions initiales : à $t = 0$, $i(t = 0^+) = i_0$ donc $B = i_0$.

La solution est finalement :

$$i(t) = i_0\exp(-t/\tau).$$

Remarque 3.8 *L'équation différentielle étant du premier ordre, seule une condition initiale suffit pour déterminer la solution.*

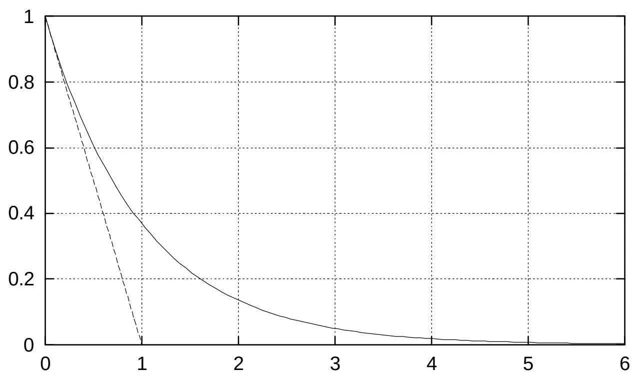

Fig.3.5. Courant en fonction du temps. Les échelles sont normalisées : $i(t)/i_0$ en ordonnée, et t/τ en abscisse.

Remarque 3.9 *La tangente à l'origine de la courbe coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.*

Remarque 3.10 *Comme pour le circuit RC, il faut 4 à 5τ pour que le courant devienne quasi-nul.*

Ensuite, le calcul de la tension $u(t)$ s'effectue simplement en écrivant

$$u = -Ri = -Ri_0 \exp(-t/\tau).$$

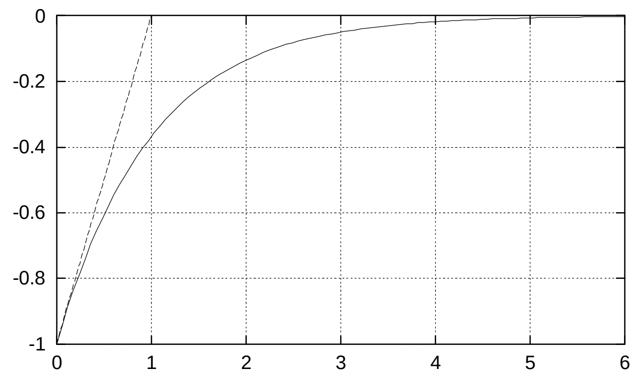

Fig.3.6. Tension en fonction du temps. Les échelles sont normalisées : $uc(t)/(Ri_0)$ en ordonnée, et t/τ en abscisse.

Remarque 3.11 *La courbe 3.5 est continue : à $t < 0$, $i = i_0$ puis décroît de cette valeur après $t = 0$. Ceci était prévisible : l'intensité du courant dans une bobine est toujours continue dans le temps.*

Remarque 3.12 *La courbe 3.6 est discontinue : à $t < 0$, $u = 0$ puis passe subitement à $-Ri_0$ à $t = 0^+$. Il n'y a pas de présence de condensateur.*

3.1.2.4. Etude énergétique

Comme pour le circuit RC l'équation du circuit (loi des mailles) est multipliée par le courant i :

$$i\left(L\frac{di}{dt}=-Ri\right)$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)=-Ri^2.$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : l'énergie $\left(1/2Li^2\right)$ perdue par la bobine par unité de temps est égale à la puissance dissipée par la résistance $-Ri^2$ (sous forme de chaleur par effet Joule).

3.1.3. Le régime libre d'un circuit RLC série

3.1.3.1. Position du problème

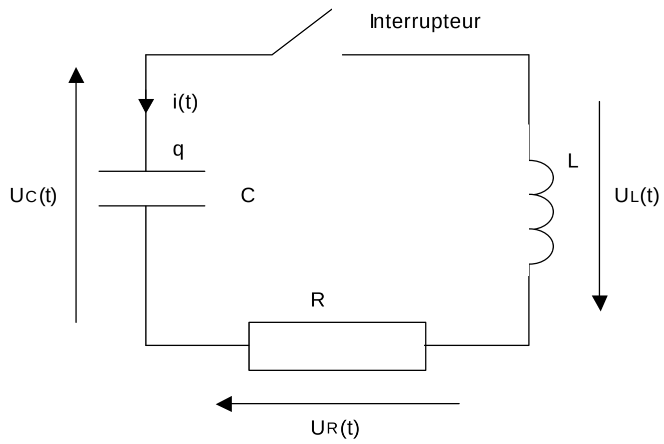

Fig.3.7. Circuit RLC

Soit un circuit composé d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine et d'un interrupteur. Les conditions initiales sont les suivantes : l'interrupteur est ouvert (donc empêche le courant de passer) et le condensateur est chargé q_o. A $t=0$, l'interrupteur est fermé, ce qui permet ensuite au courant de passer donc au condensateur de se décharger.

3.1.3.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit RLC série ne comporte qu'une maille :

$$u_L+u_R+u_C=0$$

soit

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0. \tag{4}$$

Il y a alors deux méthodes pour obtenir une équation différentielle.

La première méthode consiste à dériver l'équation(4) ce qui donne une équation différentielle en $i(t)$:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

La deuxième méthode consiste à exprimer $i(t)$ et $u_C(t)$ en fonction de la charge $q(t)$.Compte tenu du fait que $u_C = q/C$ et que $i = dq/dt$, l'équation (4) s'écrit :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

soit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{5}$$

ce qui donne une équation différentielle en $q(t)$. C'est l'équation différentielle que nous allons résoudre.

Remarque 3.13 *L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du $2^{ième}$ ordre : le circuit est lui-même dit "linéaire du second ordre".*

R/L est homogène à l'inverse d'un temps et LC à un temps au carré. On pose :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \text{ou} \qquad \frac{R}{L} = 2\lambda$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ appelé **la pulsation propre** du circuit (en s^{-1}) ;
$Q = 1/R\sqrt{L/C}$ est appelé **le facteur de qualité** du circuit (sans unité)
$\lambda = R/(2L)$ est appelé **le coefficient d'amortissement** du circuit (en s^{-1}).

Remarque 3.14 *L'équation différentielle (5) peut s'écrire respectivement, suivant que l'on fait le choix d'utiliser la facteur de qualité Q ou le coefficient d'amortissement λ :*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \tag{6}$$

ou

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

C'est l'écriture sous forme de l'équation (6) que nous allons utiliser pour la résolution.

3.1.3.3. Solution

La résolution de l'équation différentielle (6) s'effectue en écrivant l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0, \tag{7}$$

dont les deux racines (réelles ou complexes) sont

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2.$$

Les types de solutions diffèrent suivant le signe de Δ, c'est-à-dire suivant la valeur du facteur de qualité Q.

Cas du régime apériodique ($\Delta > 0$, soit $Q < 1/2$).

Ce cas correspond à un fort amortissement, ou un faible facteur de qualité. Les 2 solutions de l'équation caractéristique (7) sont réelles :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}.$$

Remarquons que ce deux solutions réelles sont **négatives**. La solution générale est alors :

$$q(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t).$$

A et B sont déterminées avec les 2 conditions initiales données d'une part par la présence de la bobine, et d'autre part par la présence du condensateur : $i(t=0) = 0$ et $q(t=0) = q_0$.

Remarque 3.15 *Pour le circuit RLC, l'équation différentielle obtenue est du second ordre ; il y a donc 2 constantes à déterminer, qui correspondent à 2 conditions initiales.*

Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 = A + B \\ (dq/dt)(t=0) = 0 = Ar_1 + Br_2. \end{cases}$$

Ce système permet de déterminer A et B (résolution par substitution faite en classe) :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q_0 r_2}{r_1 - r_2} = q_0 \frac{\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}} \\ B &= \frac{q_0 r_1}{r_1 - r_2} = q_0 \frac{-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

La tension aux bornes du condensateur est alors (voir figure (3.8)) :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\left(A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)\right).$$

Le courant se déduit ensuite par :

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = Ar_1 \exp(r_1 t) + Br_2 \exp(r_2 t)\,,$$

ce qui donne après simplification (en ayant explicité Ar_1, et Br_2 dans l'expression ci-dessus) :

$$i(t) = \frac{-q_0\omega_0}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}}\left(\exp(r_1 t) + \exp(r_2 t)\right).$$

La représentation de cette courbe est donnée sur la figure (3.9) pour différentes valeurs du facteur de qualité Q.

Cas du régime critique ($\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$).
La solution de l'équation caractéristique (7) est réelle et double :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0.$$

La solution générale est alors :

$$q(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t)\,.$$

A et B sont déterminées avec les 2 conditions initiales : $i(t=0) = 0$ et $q(t=0) = q_0$:

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 = A \\ (dq/dt)(t=0) = 0 = B - \omega_0 A \end{cases}$$

soit

$$\begin{aligned} A &= q_0 \\ B &= \omega_0 q_0 \end{aligned}$$

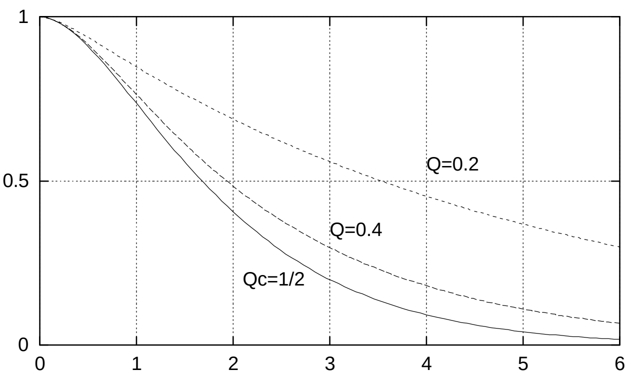

Fig.3.8. Décharge du condensateur : tension en fonction du temps pour différents facteurs de qualité (régime apériodique $Q < 1/2$ et critique $Q = 1/2$). Les échelles sont normalisées : $uc(t)/(q_0/C)$ en ordonnée, et $\omega_0 t$ en abscisse.

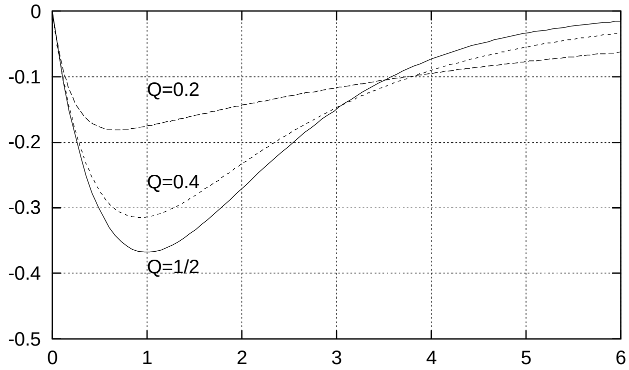

Fig.3.9. Courant en fonction du temps pour différents facteurs de qualité (régime apériodique $Q < 1/2$ *et critique* $Q = 1/2$*). Les échelles sont normalisées :* $i(t)/(\omega_0 q_0)$ *en ordonnée, et* $\omega_0 t$ *en abscisse.*

La tension aux bornes du condensateur est alors (voir figure (3.8)) :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C}\left(1 + \omega_0 t\right)\exp\left(-\omega_0 t\right).$$

Le courant se déduit ensuite par :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{C}\omega_0 \exp\left(-\omega_0 t\right) + \frac{q_0}{C}\left(1+\omega_0 t\right)\left(-\omega_0\right)\exp\left(-\omega_0 t\right) \\ i(t) &= -\frac{q_0}{C}\omega_0^2 t \exp\left(-\omega_0 t\right). \end{aligned}$$

La représentation de cette courbe est donnée sur la figure (3.9).

L'observation des courbes (3.8) et (3.9) amène les remarques suivantes : bien que les solutions mathématiques des régime apériodique et critique sont différentes, les allures graphiques sont similaires.

Concernant l'évolution de la tension, la décharge du générateur est d'autant plus rapide que le facteur de qualité se rapproche de $Q = 1/2$; une trop forte résistance est un "frein" à la décharge du condensateur. Il en est de même pour la disparition du courant.

Cas du régime pseudo-périodique ($\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$).

Ce cas correspond à un faible amortissement, ou un grand facteur de qualité. Les 2 solutions de l'équation caractéristique (7) sont complexes :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}.$$

La solution générale est alors :

$$q(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

ou

$$q(t) = D\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-(1/2Q)^2}$. A et B (ou D et φ) sont des constantes à déterminer avec les 2 conditions initiales : $i(t=0)=0$ et $q(t=0)=q_0$:

$$\begin{aligned} q(t &= 0) = q_0 = A \\ (dq/dt)\,(t &= 0) = 0 = B\omega - \frac{\omega_0}{2Q}A \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} A &= q_0, \\ B &= \frac{q_0}{2Q\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}. \end{aligned}$$

La tension aux bornes du condensateur est alors (voir figure (3.10)) :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos\omega t + \frac{1}{2Q\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}\sin\omega t\right).$$

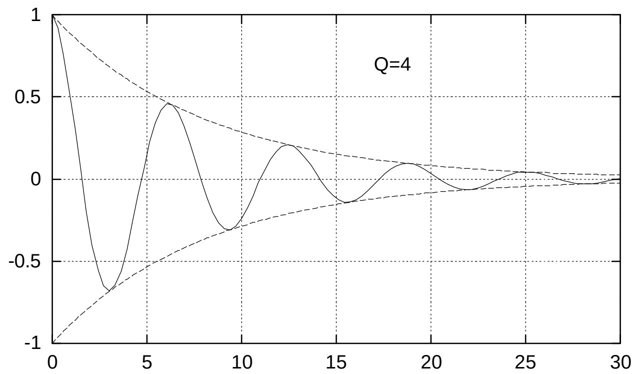

Fig.3.10. Décharge du condensateur : tension en fonction du temps pour $Q=4$. La courbe en pointillés représente l'enveloppe $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$. Les échelles sont normalisées : $uc(t)/(q_0/C)$ en ordonnée, et $\omega_0 t$ en abscisse.

Le courant se déduit ensuite par :

$$i(t) = C\frac{dU_C}{dt}$$

ce qui donne après simplification :

$$i(t) = -\frac{q_0\omega_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin\omega t.$$

La représentation de cette courbe est donnée sur la figure (3.11).

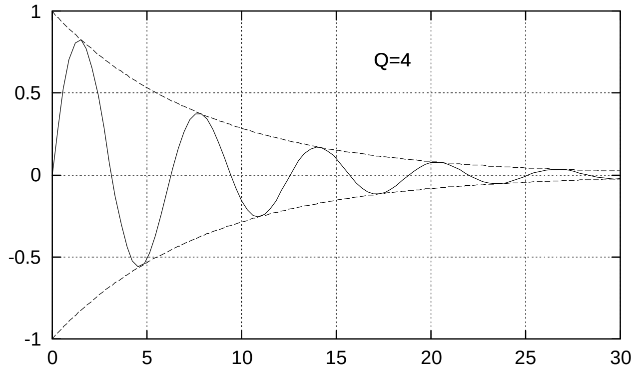

Fig.3.11. Courant en fonction du temps pour un facteur de qualité $Q = 4$. La courbe en pointillés représente l'enveloppe $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$. *Les échelles sont normalisées :* $i(t)/(\omega_0 q_0)$ *en ordonnée, et* $\omega_0 t$ *en abscisse.*

La pseudo-période de ce signal représente le temps qui sépare 2 passages à 0 de la tension ou de l'intensité, c'est-à-dire

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-(1/2Q)^2}}.$$

Enfin, plus le facteur de qualité est important, plus la décroissance exponentielle de l'enveloppe $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ est lente, c'est-à-dire qu'il y a un plus grand nombre d'oscillations. Le signal s'atténue alors plus lentement.

Remarque 3.16 *Pour le régime critique, quand Q augmente pour s'approcher de 1/2, le condensateur se décharge plus rapidement. Pour le régime pseudo-périodique inversement, plus Q diminue et se rapproche de 1/2, moins il y a d'oscillations donc le condensateur se décharge plus rapidement. Finalement,* ***le régime qui tend le plus vite vers 0 est le régime critique.***

3.1.3.4. Etude énergétique

L'équation du circuit (loi des mailles) est multipliée par le courant i :

$$i\left(L\frac{di}{dt} + Ri + u_C\right) = 0$$

soit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} &= -Ri^2, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) &= -Ri^2.
\end{aligned}$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : l'énergie totale $\left(1/2Li^2 + 1/2Cu_C^2\right)$ perdue par le circuit par unité de temps (stockée dans la bobine + le condensateur) est égale à la puissance dissipée par la résistance $\left(-Ri^2\right)$ (sous forme de chaleur par effet Joule).

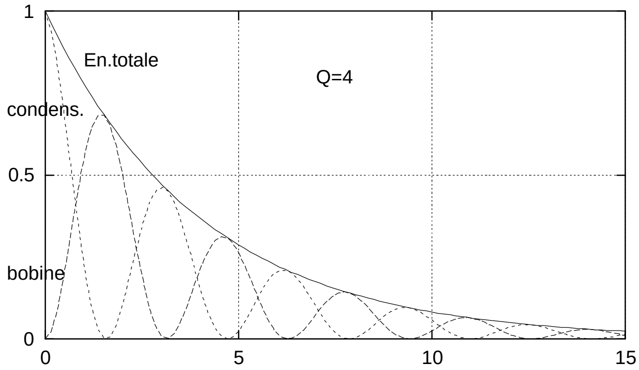

Fig.3.12. Décroissance de l'énergie dans un circuit RLC série ; les courbes pointillées représentent l'énergie stockée dans le condensateur et dans la bobine, et la courbe continue leur somme (énergie totale). Les échelles sont normalisées : énergie E/E_{init} en ordonnée, et $\omega_0 t$ en abscisse.

3.2. Réponse à un échelon de tension

Dans la première partie, l'énergie était stockée au départ dans le condensateur ou dans le bobine. Il s'agissait d'étudier la dissipation de cette énergie dans la résistance.

Cette deuxième partie s'attache au contraire à étudier un circuit ne comportant pas d'énergie au départ, et de voir comment un générateur, qui alimente ce circuit, apporte l'énergie à ce circuit (en chargeant progressivement le condensateur ou en établissant le courant dans la bobine).

Le générateur est au préalable éteint (tension nulle). A $t = 0$, le générateur est allumé et délivre une tension constante notée e_0 :
$e(t) = 0$ pour $t < 0$
$e(t) = e_0$ pour $t < 0$

3.2.1. Charge d'un condensateur dans un circuit RC

3.2.1.1. Position du problème

Soit un circuit composé d'une résistance, d'un condensateur et d'un générateur. Les conditions antérieures à $t = 0$ sont les suivantes : le générateur délivre une tension nulle, le courant est nul et le condensateur n'est pas chargé. A $t = 0$, le générateur délivre subitement une tension e_0 constante : un courant va alors circuler dans le circuit et charger le condensateur.

L'objectif est le suivant :
1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ aux bornes du condensateur ;
2. donner une solution de $u_c(t)$ pour cette équation différentielle ;
3. en déduire également l'évolution $i_c(t)$ dans le circuit ;
4. effectuer un bilan énergétique.

3.2.1.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit ne comporte qu'une maille :

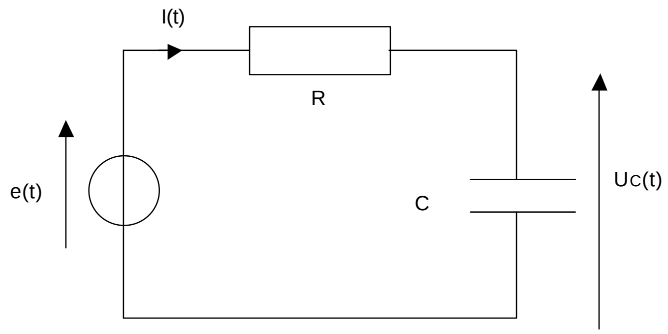

Fig.3.13.

$$u_C + Ri = e_0$$

et

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

soit

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{e_0}{RC}. \tag{8}$$

C'est l'équation différentielle à résoudre pour obtenir $u_c(t)$.

L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du 1^{ier} ordre contenant un **temps caractéristique** (ou temps de relaxation) noté τ avec $\tau = RC$.

3.2.1.3. Solution

La solution de l'équation différentielle (8) est la somme de la solution particulière $u_C = e_0$ et de la solution de l'équation sans second membre :

$$u_C(t) = e_0 + A\exp(-t/\tau).$$

Il reste à déterminer la constante A qui est donnée par les conditions initiales :

à $t = 0$, $u_C(t = 0^+) = 0 = e_0 + A$ donc $A = -e_0$.

La solution est donc finalement :

$$u_C(t) = e_0\left(1 - \exp(-t/\tau)\right).$$

Le courant se déduit par

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{du_C}{dt} = Ce_0\frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau) \\ i(t) &= \frac{e_0}{R}\exp(-t/\tau). \end{aligned}$$

La tangente à l'origine de la courbe coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$. Le signal $u_C(t)$ tend vers e_0 quand le temps tend vers l'infini (le condensateur se charge). Au bout de quelques τ, (temps de relaxation), le circuit atteint un régime établi (ou permanent). τ est un temps caractéristique qui donne un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Remarque 3.17 *Les courbes correspondantes seront ultérieurement ajoutées ici !!*

3.2.1.4. Etude énergétique

L'équation électrique

$$Ri + \frac{q}{C} = e_0$$

est multipliée par le courant $i = (dq/dt)$, ce qui donne :

$$Ri^2 + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = e_0 i$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = e_0 i - Ri^2.$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : la variation d'énergie $\left(1/2Cu_C^2\right)$ dans le condensateur par unité de temps est égale à la puissance délivrée par le générateur $(e_0 i)$ à laquelle est enlevée la puissance dissipée par la résistance $\left(-Ri^2\right)$ (sous forme de chaleur par effet Joule).

3.2.2. Etablissement d'un courant dans un circuit inductif RL

3.2.2.1. Position du problème

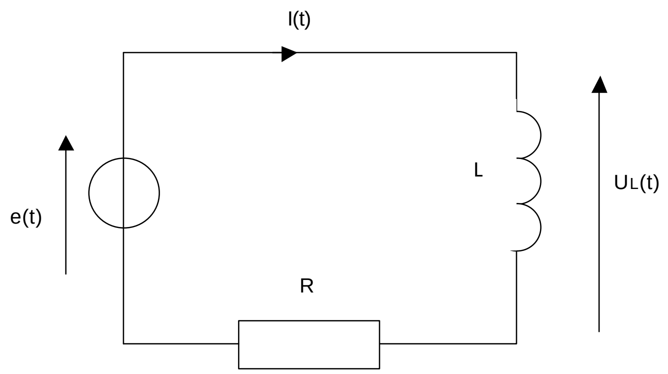

Fig.3.14.

Soit un circuit composé d'une résistance, d'une bobine et d'un générateur. Les conditions antérieures à $t = 0$ sont les suivantes : le générateur délivre une tension nulle et le courant est nul. A $t = 0$, le générateur délivre subitement une tension e_0 constante : un courant va alors circuler dans le circuit.

L'objectif est le suivant :

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ dans le circuit ;
2. donner une solution de $i(t)$ pour cette équation différentielle ;
3. en déduire également l'évolution $u_L(t)$ dans le circuit ;
4. effectuer un bilan énergétique.

3.2.2.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit ne comporte qu'une maille :

$$u_L + Ri = e_0$$

et

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

soit

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e_0}{L}. \tag{9}$$

C'est l'équation différentielle à résoudre pour obtenir $i(t)$.

L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du 1^{ier} ordre contenant un **temps caractéristique** (ou temps de relaxation) noté τ avec $\tau = L/R$.

3.2.2.3. Solution

La solution de l'équation différentielle (9)est la somme de la solution particulière ($i = e_0/R$) et de la solution de l'équation sans second membre :

$$i(t) = \frac{e_0}{R} + A\exp(-t/\tau).$$

Il reste à déterminer la constante A qui est donnée par les conditions initiales :

à $t = 0$, $i(t = 0+) = 0 = e_0/R + A$ donc $A = -e_0/R$.

La solution est donc finalement :

$$i(t) = \frac{e_0}{R}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right).$$

La tension $u_L(t)$ se déduit par

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L\frac{di}{dt} = \frac{Le_0}{R}\frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau) \\ u_L(t) &= e_0\exp(-t/\tau). \end{aligned}$$

La tangente à l'origine de la courbe coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$. Le signal $i(t)$ tend vers (e_0/R) quand le temps tend vers l'infini (le courant s'établi). Au bout de quelques τ, (temps de relaxation), le circuit atteint un régime établi (ou permanent). τ est un temps caractéristique qui donne un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

3.2.2.4. Etude énergétique

L'équation électrique

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e_0$$

est multipliée par le courant i, ce qui donne :

$$Ri^2 + L\frac{di}{dt}i = e_0 i$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = e_0 i - Ri^2.$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : la variation d'énergie $\left(1/2Li^2\right)$ dans la bobine par unité de temps est égale à la puissance délivrée par le générateur $(e_0 i)$ à laquelle est enlevée la puissance dissipée par la résistance $\left(-Ri^2\right)$.

Remarque 3.18 *Les courbes correspondantes seront ultérieurement ajoutées ici ! !*

3.2.3. Réponse à un échelon de tension d'un circuit RLC série

3.2.3.1. Position du problème

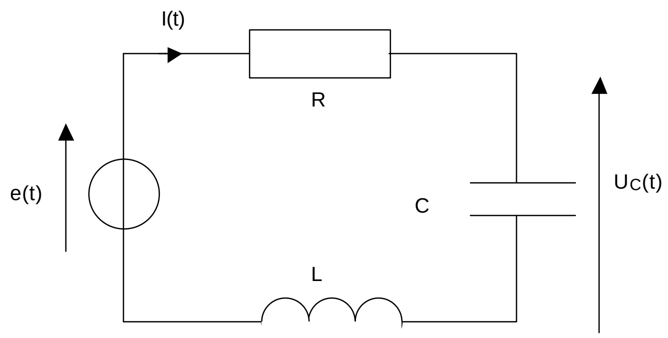

Fig.3.15.

Soit un circuit composé d'une résistance, d'une bobine, d'un condensateur et d'un générateur. Les conditions antérieures à $t = 0$ sont les suivantes : le générateur délivre une tension nulle, le courant est nul et le condensateur n'est pas chargé. A $t = 0$, le générateur délivre subitement une tension e_0 constante : un courant circule alors dans le circuit et charge le condensateur.

3.2.3.2. Etablissement de l'équation différentielle

Le circuit RLC série ne comporte qu'une maille :

$$u_L + u_R + u_C = e_0$$

soit

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = e_0. \tag{10}$$

$i(t)$ et $u_C(t)$ sont ensuite exprimés en fonction de la charge $q(t)$.Compte tenu du fait que $u_C = q/C$ et que $i = dq/dt$, l'équation (10) s'écrit :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e_0,$$

soit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{e_0}{L}. \tag{11}$$

ce qui donne une équation différentielle en $q(t)$. C'est l'équation différentielle à résoudre.

Le circuit est dit "linéaire du second ordre" car l'équation différentielle obtenue est linéaire du second ordre.

R/L est homogène à l'inverse d'un temps et LC à un temps au carré. Comme pour le circuit RLC série en régime libre, on pose :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \text{ou} \qquad \frac{R}{L} = 2\lambda$$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ appelé **la pulsation propre** du circuit (en s^{-1}) ;
$Q = 1/R\sqrt{L/C}$ est appelé **le facteur de qualité** du circuit (sans unité)
$\lambda = R/(2L)$ est appelé **le coefficient d'amortissement** du circuit (en s^{-1}).

3.2.3.3. Solution

L'équation différentielle (11) à résoudre est

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{e_0}{L}.$$

La solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre.

La solution particulière est $q = Ce_0$. La solution est donc

$$q(t) = Ce_0 + \text{sol ESSM}.$$

L'équation sans second membre est identique à celle du paragraphe (3.1.3). Il faut écrire l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$$

ou

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

si l'on choisit d'introduire la pulsation propre et le facteur de qualité. Suivant la valeur du facteur de qualité ($Q < 1/2$, $Q = 1/2$ ou $Q > 1/2$) la solution de l'équation sans second membre donnera respectivement un régime apériodique ou critique ou pseudo-périodique.

Il reste tout de même à exprimer les deux conditions initiales pour déterminer les constantes qui apparaissent dans la solution de l'équation sans second membre. Ces conditions initiales sont dans le cas présent : $u_C(t=0) = q(t=0) = 0$ et $i(t=0) = (dq/dt)(t=0) = 0$.

Remarque 3.19 *Attention ! les conditions initiales doivent être exprimées sur l'ensemble de la solution générale (sol $ESSM$+sol part).*

Remarque 3.20 *Les solutions et les courbes correspondantes de la tension et du courant seront ultérieurement ajoutées ici ! !*

3.2.4. Conclusion : établissement d'un régime forcé

Paragraphe traité en classe.