

Chapitre 1

Cinématique du point matériel

1.1. Introduction

1.1.1. Domaine d'étude

Le programme de mécanique de math sup se limite à l'étude de la mécanique classique.

Sont exclus : la relativité et la mécanique quantique.

La cinématique consiste uniquement à **décrire** les trajectoires de points en mouvement, sans s'occuper de ce qui peut être la cause de leur mouvement. Le lien entre la cause des mouvements (les forces) et les trajectoires sera l'objet du chapitre suivant (dynamique du point matériel)

1.1.2. Un peu d'histoire

La mécanique a été étudiée depuis plusieurs millénaires par l'homme, en particulier pour répondre aux besoins de la construction. Les égyptiens par exemple ont développé les techniques permettant d'élever de lourdes charges.

La développement de la partie théorique de la mécanique n'intervient que relativement récemment. Quelques dates peuvent être citées :

- 1638 : Galilée publie "discours et démonstrations, deux sciences nouvelles", ouvrage dans lequel il aborde les problèmes de résistance des matériaux et de mouvement des corps pesant notamment, en définissant mathématiquement la vitesse et l'accélération ;

- 1657 : Huygens met au point la première horloge à balancier, ainsi que la première montre à balancier et ressort spiral ;

- 1687 : Newton publie "Principes mathématiques de philosophie naturelle", ouvrage capital qui est le fondement de la mécanique classique.

Enfin aux *XVIII^{ième}* et *XIX^{ième}* siècles, des savants tels que d'Alembert, Lagrange, Coriolis et d'autres, formalisent la théorie pour l'amener à la théorie classique telle qu'on la connaît aujourd'hui.

Les développements de la recherche actuelle en mécanique classique s'appuient toujours sur les mêmes équations fondamentales ; toutefois les problèmes étudiés sont plus complexes, comme par exemple les vibrations dans des solides (voitures), les corps sont plus complexes comme les problèmes de corps déformables, la mécanique des fluides (turbulences par exemple) ; on peut citer aussi les études sur les résistances des matériaux. Ce ne sont là que quelques exemples, mais les équations fondamentales ne sont pas remises en cause.

1.2. Repérage d'un point ; systèmes usuels de coordonnées

1.2.1. Choix d'un système de coordonnées

L'espace contient 3 dimensions ; cela signifie qu'il faut 3 coordonnées pour définir la position d'un point M dans l'espace.

La première étape consiste à choisir un point qui servira de référence : c'est le **point origine noté O** .

Le point M est alors repéré par rapport à O : on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le **vecteur position de M** .

Il reste à repérer le vecteur \overrightarrow{OM} ; il faut pour cela définir **une base vectorielle** notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Le vecteur \overrightarrow{OM} peut alors se décomposer dans cette base en :

$$\overrightarrow{OM} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3.$$

(u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Toutefois, pour des raisons pratiques (en particulier lors de calculs de produits scalaires et produits vectoriels), il est important que la base utilisée soit **orthonormée directe**.

Orthonormée signifie :

-ortho :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= 0, \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= 0, \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 &= 0; \end{aligned}$$

-normé :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1.$$

Cette base est dite directe si :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 &= \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *La base orthonormée étant directe, la "règle des trois doigts" peut-être utilisée (cf explication en classe).*

Il est très important de bien choisir le système de coordonnées dans lequel la description du problème va être faite pour simplifier les calculs.

Dans le plan par exemple, on pourra utiliser 2 axes x et y et repérer ainsi le point M étudié. Toutefois, si le mouvement de M est circulaire, l'utilisation de x et y sera compliquée : il vaudra mieux repérer le point par sa distance depuis le centre O (rayon r), et l'angle parcouru. C'est ce que l'on appelle les **coordonnées polaires**.

Pour un mouvement à trois dimensions sur la Terre, il est usuel (et plus simple !) de repérer un point par sa latitude, sa longitude et son altitude (c'est ce que l'on va appeler le système de coordonnées sphériques).

1.2.2. Les différents systèmes de coordonnées

1.2.2.1. Les coordonnées cartésiennes

Soit un point fixe O (appelé origine), et une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe.

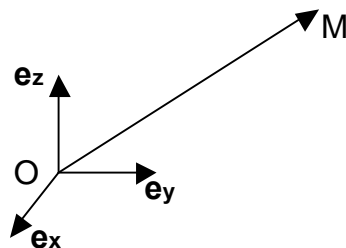


Fig.1.1. Coordonnées cartésiennes

Le vecteur position se note :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z;$$

les coordonnées cartésiennes sont (x, y, z) .

1.2.2.2. Les coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

De nombreux problèmes possèdent un axe privilégié, et l'utilisation du système de coordonnées cartésiennes est alors peu judicieuse. Un point en rotation autour d'un axe (sur un manège tournant par exemple) est plus aisément repéré par sa distance au centre, et par un angle de rotation autour de l'axe. C'est pour faciliter l'étude de ce genre de problèmes que sont introduites les coordonnées cylindriques.

Soit un point fixe origine O et le système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) précédemment défini. Soit M un point que l'on cherche à repérer. L'axe privilégié du problème est placé suivant (Oz) (par exemple l'axe de rotation du manège). Soit H le projeté de M sur le plan (O, x, y) , et Z le projeté de M sur l'axe (Oz) .

Le point M est repéré par :

- r la distance de M à l'axe (Oz) , soit la distance ZM ou encore OH ;

- θ l'angle (\vec{Ox}, \vec{OM}) ;

- z la distance HM , soit encore la distance OZ .

r est appelé rayon polaire ; θ est l'angle polaire et z la cote.

La position de chaque point doit toutefois être toutefois définie par un unique triplet (r, θ, z) . r ne varie donc que de 0 à $+\infty$; θ varie de 0 à 2π ; z varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque 1.2 Ce système de coordonnées est une "version à 3 dimensions" du système de coordonnées polaires : z est la hauteur du point M par rapport au plan (Oxy) , puis (r, θ) sont les coordonnées polaires de M dans le plan $z = cte$.

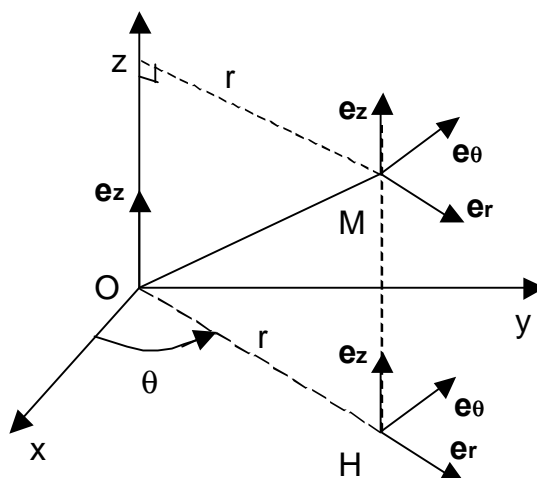


Fig.1.2. Coordonnées cylindriques

Remarque 1.3 r n'est jamais négatif (c'est une distance), car alors les points de coordonnées (r, θ, z) et $(-r, \theta + \pi, z)$ seraient les mêmes : il y aurait alors plusieurs coordonnées différentes permettant de définir la position d'un point donné.

Il reste à définir une base locale associée à ce système de coordonnées cylindriques et notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

- $\vec{e}_r = \overrightarrow{OH}/OH = \overrightarrow{ZH}/ZH$; c'est le vecteur radial ;
- \vec{e}_z est le même vecteur qu'en coordonnées cartésiennes ;
- \vec{e}_θ est un vecteur tel que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit orthonormée directe, ce qui signifie $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$; c'est le vecteur orthoradial.

Remarque 1.4 Pour repérer les directions et les sens des vecteurs de la base cylindrique, il suffit de se souvenir de la remarque suivante :

- si r est augmenté à $r + \Delta r$, tout en gardant θ et z constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_r ;
- si θ est augmenté à $\theta + \Delta\theta$, tout en gardant r et z constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_θ ;
- si z est augmenté à $z + \Delta z$, tout en gardant r et θ constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_z .

Remarque 1.5 Il faut bien remarquer que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est mobile ! Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ ont une direction changeante quand le point M se déplace.

Le vecteur \overrightarrow{OM} s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.}$$

Il est important de noter que le vecteur \overrightarrow{OM} n'a aucune composante suivant \vec{u}_θ . Cela vient justement du fait que \vec{e}_r suit le mouvement de M . Pourtant, pour repérer la position du point M , la donnée de l'angle θ est nécessaire au même titre que la donnée de r et z .

1.2.2.3. Les coordonnées sphériques

Prenons comme exemple un point M repéré à la surface de la Terre. La méthode la plus facile pour repérer ce point est l'utilisation de deux angles appelés latitude et longitude. Plus généralement, pour tout mouvement de M autour d'un point O particulier, il est préférable de repérer M par 3 coordonnées qui sont : la distance depuis O , et deux angles de rotation autour de O . Ceci nous amène à définir le système de coordonnées sphériques.

Soit un point fixe origine O et le système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) précédemment défini. Soit M un point que l'on cherche à repérer. Soit H le projeté de M sur le plan (O, x, y) (voir figure 1.3) :

Le point M est repéré par :

- r la distance de M au point O ;

- θ l'angle (\vec{Oz}, \vec{OM}) ;

- φ l'angle (\vec{Ox}, \vec{OH}) .

r est appelé rayon ; θ est la colatitude, φ la longitude ou l'azimut.

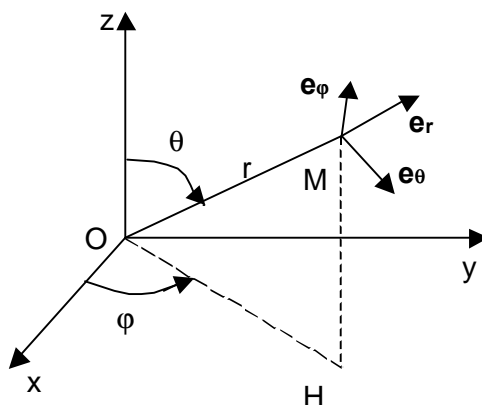


Fig.1.3. Coordonnées sphériques

La position de chaque point doit toutefois être définie par un unique triplet (r, θ, φ) . r ne varie donc que de 0 à $+\infty$; θ varie de 0 à π et φ varie de 0 à 2π .

Remarque 1.6 De même qu'en coordonnées cylindriques, r n'est jamais négatif.

D'autre part φ variant de 0 à 2π , il suffit de faire varier θ de 0 à π pour pouvoir "balayer" toutes les directions de l'espace une fois et une seule.

Il reste à définir une base locale associée à ce système de coordonnées cylindriques et notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

- $\vec{e}_r = \vec{OM}/OM$;

- \vec{e}_θ est dans le plan (Oz, OM) et orthogonal à \vec{e}_r pointé dans le sens des θ croissants ;

- \vec{e}_φ est dans le plan (Ox, Oy) tel que $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$.

Remarque 1.7 Pour repérer les directions et les sens des vecteurs de la base cylindrique, il suffit de se souvenir de la remarque suivante :

-si r est augmenté à $r + \Delta r$, tout en gardant θ et φ constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_r ;

-si θ est augmenté à $\theta + \Delta\theta$, tout en gardant r et φ constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_θ ;

-si φ est augmenté à $\varphi + \Delta\varphi$, tout en gardant r et θ constants : le point M se déplace dans la direction de \vec{e}_φ .

Remarque 1.8 Attention!! le rayon r des coordonnées sphériques est différent du r des coordonnées cylindriques; de même, les angles θ dans les deux systèmes de coordonnées représentent des angles différents.

Remarque 1.9 De même que la base de coordonnées cylindriques, il faut bien remarquer que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est mobile! Les 3 vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ ont une direction changeante quand le point M se déplace.

Le vecteur \vec{OM} s'écrit alors tout simplement :

$$\boxed{\vec{OM} = r\vec{e}_r.}$$

Il est important de noter que le vecteur \vec{OM} n'a aucune composante ni suivant \vec{e}_θ , ni suivant \vec{e}_φ . Cela vient du fait que \vec{e}_r suit le mouvement de M : il est toujours pointé vers M . Pourtant, pour repérer la position du point M , la donnée des angles θ et φ est nécessaire au même titre que la donnée de r ; le vecteur \vec{e}_r dépend lui même de θ et φ .

1.2.2.4. Relation de passage d'un système de coordonnées à un autre

- Détermination des relations de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes.

En se reportant à la figure 1.2, avec $OH = r$, il vient :

$$\boxed{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases}}$$

Le passage inverse, de x , y et z à r , θ et φ s'obtient en remarquant que $x^2 + y^2 = r^2$ et $\tan \theta = y/x$.

L'expression des vecteurs de la base cylindrique en fonction des vecteurs de la base cartésienne s'obtient aussi à l'aide de la figure 1.2, dont on peut ne représenter que le plan (xOy) comme ci-dessous.

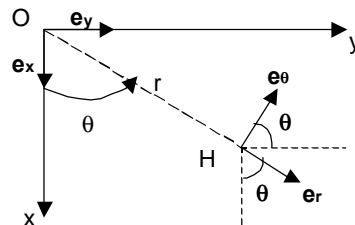


Fig.1.4.

Il vient alors :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z. \end{cases}$$

- *Détermination des relations de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes.*

En se reportant à la figure 1.3, et en remarquant que $OH = r \sin \theta$, il vient :

$$\begin{cases} x = OH \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = OH \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

L'expression des vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ en fonction de \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z est plus complexe à obtenir et sera rarement utilisé. Il suffit de s'aider de la figure 1.3 et de décomposer les vecteurs dans la base cartésienne. Par exemple :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y).$$

1.2.3. Calcul de la dérivée d'un vecteur

1.2.3.1. Notion de référentiel

La vitesse \vec{v} est, comme on le verra par la suite, \overrightarrow{dOM}/dt , c'est à dire la variation du vecteur position par unité de temps. Il sera donc utile de savoir dériver un vecteur dans un système de coordonnées.

Remarque 1.10 *Prenons un train en marche dans lequel se trouvent deux personnes. Une personne s'y déplace ; comment définir sa vitesse ? La vitesse par rapport à la deuxième personne assise est évidemment différente de la vitesse par rapport à l'extérieur. Il est donc nécessaire de définir un référentiel avant de définir une vitesse.*

Un référentiel R est un ensemble rigide de points considérés fixes (il en faut au moins trois non alignés).

La vitesse est alors définie par rapport au référentiel R . Une fois ce référentiel choisi, un repère cartésien y est défini, c'est à dire que l'on choisit des axes (Ox) , (Oy) et (Oz) fixés sur ce référentiel R .

Attention !! Il est important de ne pas confondre référentiel et repère ! Il est possible de choisir par exemple comme référentiel les murs du laboratoire (considérés donc comme fixes) et de prendre comme repère soit le repère cartésien associé au laboratoire, soit par exemple un repère cylindrique ou sphérique. Ces derniers sont mobiles dans le référentiel du laboratoire, mais seront plus appropriés si la trajectoire du point M à étudier est circulaire par exemple.

En conclusion, pour calculer la dérivée d'un vecteur (comme le vecteur position par exemple), il est absolument nécessaire de définir dans un premier temps le référentiel dans lequel la dérivée est calculée, puis ensuite de choisir la base dans laquelle sera exprimé le vecteur résultat.

1.2.3.2. Calcul de la dérivée d'un vecteur dans un référentiel donné

L'objectif est ici de calculer la dérivée d'un vecteur dans un référentiel R donné, par exemple le vecteur position \overrightarrow{OM} , dans différents systèmes de coordonnées.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont fixes ; ils sont donc considérés comme constants lors du calcul de la dérivée.

Par exemple, la dérivée dans R du vecteur position

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

compte tenu du fait que \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont des vecteurs constants, s'écrit simplement :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{/R} \vec{e}_x + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{/R} \vec{e}_y + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{/R} \vec{e}_z.$$

Par contre, en coordonnées cylindriques, \vec{e}_r et \vec{e}_θ varient ! Le calcul de la dérivée d'un vecteur \vec{OM} s'effectue alors comme suit :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/R} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)_{/R} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{/R} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/R} + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{/R} \vec{e}_z.$$

Il ne faut pas oublier que le vecteur \vec{e}_r varie et doit lui même être dérivé !!

Le problème qui se pose alors est de savoir calculer $(d\vec{e}_r/dt)_{/R}$.

Pour calculer sa dérivée, le vecteur \vec{e}_r est exprimé dans la base de coordonnées cartésiennes (fixe) :

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y.$$

avec θ dépendant de t . Il est plus aisé d'effectuer un changement de variable et de dériver par rapport à θ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

et

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y = \vec{e}_\theta$$

soit finalement

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/R} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

en notant $\dot{\theta}$ la dérivée de θ par rapport au temps.

De même, il peut être nécessaire dans certains cas (calcul de l'accélération par exemple) de dériver temporellement le vecteur \vec{e}_θ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

et

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) = -\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y = -\vec{e}_r$$

soit finalement

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/R} = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

En conclusion :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/R} = \vec{e}_\theta \quad ; \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/R} = -\vec{e}_r.$$

Remarque 1.11 Dériver \vec{e}_r ou \vec{e}_θ par θ revient tout simplement à effectuer une rotation du vecteur de $\pi/2$ autour de \vec{e}_z .

Maintenant que nous avons posé ces éléments, et sachant dériver les vecteurs mobiles \vec{e}_r et \vec{e}_θ , nous possédons tous les outils nécessaires pour calculer les éléments cinématiques dans divers systèmes de coordonnées, à savoir la vitesse et l'accélération. C'est l'objet de la partie (1.3) de ce chapitre.

1.3. Cinématique du point dans un référentiel donné

1.3.1. Vitesse d'un point dans un référentiel donné

Soit un référentiel donné R considéré fixe, et un point O fixe dans ce référentiel. La vitesse dans ce référentiel d'un point M mobile est notée $\vec{v}(M)_{/R}$; elle sera exprimée dans un système de coordonnées choisi, à l'aide de la base correspondante à ce système de coordonnées. La vitesse instantanée de M à un instant t est la distance parcourue entre les instants très rapprochés t et $t + \Delta t$ divisée par Δt :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}}{\Delta t}.$$

que l'on notera

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + dt)}}{dt} = \frac{\overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

Remarque 1.12 Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point M .

Le but est maintenant d'exprimer la vitesse dans les différents systèmes de coordonnées. On supposera que l'on travaille toujours dans le référentiel R ; on ne précisera donc pas systématiquement par la suite dans quel référentiel sont effectués les dérivées.

1.3.1.1. Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir cette vitesse, il existe deux méthodes : par le calcul, ou par un raisonnement géométrique.

Méthode 1 : Par le calcul, en dérivant le vecteur \overrightarrow{OM} par rapport à t :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

ce qui permet d'écrire tout simplement

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \end{aligned} \quad (1)$$

en notant par un "point" par dérivée par rapport au temps t .

Méthode 2 : la méthode géométrique. La première étape consiste à exprimer un petit déplacement en coordonnées cartésiennes.

Soit le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Considérons un petit déplacement $d\overrightarrow{OM}$ (noté aussi \vec{dr}) de $M(x, y, z)$ en $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$. On note que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$. Cherchons à exprimer $d\overrightarrow{OM}$ à partir de la figure 1.1 :

-le passage de x à $x + dx$ crée un déplacement de M d'une distance dx suivant la direction \vec{e}_x ;

-le passage de y à $y + dy$ crée un déplacement de M d'une distance dy suivant la direction \vec{e}_y ;

-Le passage de z à $z + dz$ crée un déplacement de M d'une distance dz suivant la direction \vec{e}_z .

Ceci permet finalement d'écrire :

$$\vec{dr} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z.$$

La vitesse se déduit tout simplement en "divisant par dt " :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

1.3.1.2. Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Les deux méthodes sont ici reprises : par le calcul, ou par un raisonnement géométrique.

Méthode 1 : Par le calcul :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$

ce qui permet d'écrire

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

Or

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta,$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z, \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.\end{aligned}\tag{2}$$

Méthode 2 : la méthode géométrique. La première étape consiste à exprimer un petit déplacement en coordonnées cartésiennes.

Soit le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Considérons un petit déplacement $d\overrightarrow{OM}$ (noté aussi \vec{dr}) de $M(r, \theta, z)$ en $M'(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$.

Cherchons à exprimer $d\overrightarrow{OM}$ à partir de la figure 1.2 :

-le passage de r à $r + dr$ crée un déplacement de M d'une distance dr suivant la direction \vec{e}_r ;

-le passage de θ à $\theta + d\theta$ crée un déplacement de M d'une distance $rd\theta$ suivant la direction \vec{e}_θ ;

-le passage de z à $z + dz$ crée un déplacement de M d'une distance dz suivant la direction \vec{e}_z .

Ceci permet finalement d'écrire :

$$\overrightarrow{dr} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z.$$

La vitesse se déduit tout simplement en "divisant par dt " :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

1.3.1.3. Expression de la vitesse en coordonnées sphériques

La méthode par le calcul est assez longue et difficile et n'est pas abordée ici. Il faut préciser tout de même que les calculs de dérivée des vecteurs de la base cylindrique effectués en partie 1.2.3.2 ne s'appliquent pas aux coordonnées sphériques.

Attention, en coordonnées sphériques :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \neq \vec{e}_\theta!!$$

Nous allons donc nous contenter d'appliquer la méthode géométrique. La première étape consiste à exprimer un petit déplacement en coordonnées cartésiennes.

Soit le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Considérons un petit déplacement $d\overrightarrow{OM}$ (noté aussi \overrightarrow{dr}) de $M(r, \theta, \varphi)$ en $M(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$.

Cherchons à exprimer $d\overrightarrow{OM}$ à partir de la figure 1.3 :

-le passage de r à $r + dr$ crée un déplacement de M d'une distance dr suivant la direction \vec{e}_r ;

-le passage de θ à $\theta + d\theta$ crée un déplacement de M d'une distance $r d\theta$ suivant la direction \vec{e}_θ ;

-le passage de φ à $\varphi + d\varphi$ crée un déplacement de M d'une distance $r \sin \theta d\varphi$ suivant la direction \vec{e}_φ .

Ceci permet finalement d'écrire :

$$\overrightarrow{dr} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi.$$

La vitesse se déduit alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi, \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

1.3.2. Accélération d'un point dans un référentiel donné

L'accélération de M dans un référentiel R est donnée par

$$\left(\overrightarrow{a(M)}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{/R}.$$

Il n'existe pas de méthode géométrique pour la déterminer. L'expression de l'accélération est donc déterminée par le calcul de la dérivée temporelle des vitesses obtenues dans les paragraphes précédents.

1.3.2.1. Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes

Partons de la relation (1) :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \right) \\ \vec{a} &= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z.\end{aligned}$$

1.3.2.2. Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques

Partons de la relation (2) :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \right) \\ &= \left(\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right) + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.\end{aligned}$$

1.3.2.3. Expression de l'accélération en coordonnées sphériques

Le calcul de l'accélération en coordonnées sphériques est un calcul rarement effectué... et très compliqué! Son expression n'est pas démontrée ici, mais donnée simplement à titre indicatif.

Il faudrait partir de la relation (3) :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

et dériver le vecteur \vec{v} , ce qui suppose savoir dériver les vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ par rapport au temps.

Le résultat obtenu est alors

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right)\vec{e}_r \\ &+ \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \right)\vec{e}_\theta \\ &+ \left(2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi} \right)\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

1.3.3. Exemple de mouvements simples

Paragraphe traité en cours.