Chapitre 3
Travail d'une force ; puissance et énergie

3.1. Travail d'une force ; théorème de l'énergie cinétique

3.1.1. Travail et puissance d'une force

Soit M un point matériel de masse m et repéré dans un référentiel R par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

M est soumis à une force $\vec{F}$ et se déplace. Pendant un temps dt, M a parcouru la distance $d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Définition

Le travail élémentaire noté δW de la force $\vec{F}$ pendant un temps dt est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\vec{v}\,dt.}$$

Si M a parcouru un chemin C allant de M_1 à M_2, le travail total W de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement est :

$$W_{C_{M_1 \to M_2}} = \int_C \delta W = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \vec{F}.\vec{v}\,dt.$$

Remarque importante : A priori, le travail de la force $\vec{f}$ pour aller de M_1 à M_2 dépend du chemin suivi ! (d'où la notation δW et non dW).

Définition

On appelle puissance de la force $\vec{f}$:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{f}.\vec{v}.$$

Unités :	- Travail W	en Joule	(noté J, égal à des $kg.m^2.s^{-2}$) ;
	- Puissance P	en Watt	(noté W, égal à des $J.s^{-1}$ ou $kg.m^2.s^{-3}$).

3.1.2. Théorème de l'énergie cinétique

C'est une conséquence du principe fondamental de la dynamique rappelé ici :

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt\\ &= m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)dt\\ &= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right).\end{aligned}$$

Le travail lors d'un trajet sur un chemin C pour aller d'un point M_1 à un point M_2 s'obtient par intégration du travail élémentaire sur C :

$$W = \int_C \delta W = \int_C d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{M1}^{M2}.$$

Par définition, la quantité $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ est appelée énergie cinétique et notée Ec :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2.$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut alors s'énoncer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}W_C &= Ec(M_1) - Ec(M_2)\\ W_C &= \Delta Ec.\end{aligned}$$

La variation d'énergie cinétique pour aller d'un point M_1 à un point M_2 est égale au travail de la force s'exerçant sur ce point lors de ce trajet.

Ce théorème se généralise quand il y a présence de plusieurs forces ; il suffit alors d'additionner le travail de toutes les forces :

$$\boxed{\sum W_C = \Delta Ec.}$$

3.2. Forces conservatives, énergie potentielle

3.2.1. Gradient d'une fonction

Soit f une fonction dépendant des coordonnées de l'espace.

Définition
Un petit déplacement $d\vec{OM}$ provoque une petite variation df de f. Le gradient est alors défini par :

$$\boxed{df = \vec{grad}f\cdot d\vec{OM}.} \qquad (1)$$

Le gradient est un opérateur qui transforme une fonction f à plusieurs variables en un champ de vecteur.

Remarque 3.1 Il est possible de donner une interprétation plus physique à la définition donnée par la relation (1). En effet, plaçons nous en un point M donné. Si le déplacement

$\overrightarrow{dOM}$ s'opère dans la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}f$, le produit scalaire entre ces deux grandeurs (donc df) sera maximal. Si à l'inverse le déplacement $\overrightarrow{dOM}$ s'opère dans la direction orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}}f$, le produit scalaire entre ces deux grandeurs sera nul, donc df sera nul. Le vecteur gradient de la fonction f est donc un vecteur qui pointe dans la direction de plus forte variation de f. Par exemple si f est la température T avec $T(x;y;z)$ variable (température inhomogène dans une pièce par exemple), en un point donné, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}T$ est un vecteur qui indique la direction dans laquelle la température augmente le plus. Ajoutons enfin que la norme du vecteur gradient est d'autant plus importante que les variations de f dans l'espace sont grandes.

La démonstration des expressions du gradient dans les divers systèmes de coordonnées est effectuée en classe. Nous rappelons ici seulement les résultats.

-En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

-En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

-En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}.$$

3.2.2. Energie potentielle

Définition

On dit qu'un champ de force $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire Ep dépendante de l'espace telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(Ep).} \tag{2}$$

On peut également dire (ce qui est équivalent) que la force $\overrightarrow{F}$ est **conservative** (voir l'explication ultérieure en remarques 3.4 et 3.5). Ep est alors appelée énergie potentielle du point M.

Cette définition peut être simplifiée dans le cas d'un problème à 1 seule dimension spatiale (par exemple la force de pesanteur qui est toujours dirigée verticalement suivant z). Dans ce cas particulier, on dit qu'un champ de force F dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire Ep dépendant de z telle que

$$F = -\frac{dEp(z)}{dz}. \tag{3}$$

Remarque 3.2 Considérons une force $\overrightarrow{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle Ep. L'énergie potentielle $Ep_2 = (Ep + Cte)$ avec Cte une constante convient également, et vérifie aussi la relation (2), car $\overrightarrow{\text{grad}}(Cte) = 0$. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près. Comme en électronique pour le potentiel électrique, cette constante n'a pas d'importance et peut être choisie arbitrairement.

3.2.3. Exemples

3.2.3.1. La force de pesanteur

La force de pesanteur s'appliquant à un point M de masse m à la surface de la Terre est

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$$

avec $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre, et $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire de la base cartésienne dirigé verticalement vers le haut. Recherchons s'il existe une fonction $E_p(x; y; z)$ telle que la relation (2) soit vérifiée :

$$-mg\vec{e_z} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e_z}.$$

L'égalité des termes en $\vec{e_x}$ d'une part et en $\vec{e_y}$ d'autre part permet d'écrire que $\partial E_p/\partial x = 0$ et $\partial E_p/\partial y = 0$, ce qui signifie que E_p ne dépend ni de x, ni de y, c'est-à-dire que E_p est une fonction d'une seule variable z et que (en projetant sur $\vec{e_z}$) :

$$-mg = -\frac{\partial E_p(z)}{\partial z},$$

relation que l'on aurait pu donner directement d'après l'équation (3). L'intégration donne :

$$E_p(z) = mgz + cte.$$

C'est l'énergie potentielle dont dérive le poids.

3.2.3.2. La force de rappel d'un ressort

La force de rappel d'un ressort de raideur k s'appliquant à un point M de masse m est :

$$\vec{F} = -kx\vec{e_x}$$

avec $\vec{e_x}$ le vecteur unitaire de la base cartésienne dirigé suivant la direction du ressort. L'origine du repère $x = 0$ est pris au niveau de la masse quand le ressort n'est pas étiré, de telle sorte que l'allongement du ressort soit tout simplement x. Ce problème est à une seule dimension spatiale x. Recherchons s'il existe une fonction $E_p(x)$ telle que la relation (3) soit vérifiée :

$$-kx = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x},$$

qui s'intègre en :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte.$$

C'est l'énergie potentielle dont dérive la tension du ressort. La constante cte est sans importance et est généralement choisie nulle.

3.2.3.3. La force d'interaction Coulombienne

La force d'interaction Coulombienne entre deux points P et M de charges respectives q et q' placées à une distance r l'une de l'autre est :

$$\vec{F}_{P\to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_{P\to M}.$$

$\vec{F}_{P\to M}$ est la force de P sur M et $\vec{e}_{P\to M}$ le vecteur unitaire dirigé de P vers M. Pour calculer l'énergie potentielle d'interaction Coulombienne, il est utile dans un premier temps de choisir le référentiel et le repère les plus appropriés possibles. Prenons un référentiel quelconque, mais d'origine $O = P$ de sorte que la charge P soit immobile. Choisissons ensuite le système de coordonnées sphériques pour repérer M : son avantage est de faire coïncider $\vec{e}_{P\to M}$ avec $\vec{e}_r$, le vecteur unitaire radial de la base sphérique. Recherchons s'il existe une fonction $Ep(r, \theta, \varphi)$ telle que la relation (2) soit vérifiée :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Ep) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

La force est toujours dirigée suivant $\vec{e}_r$, les composantes du gradient suivant $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ sont nulles, donc les dérivées partielles de Ep en θ et φ sont nulles. Ep est une fonction d'une seule variable r avec :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2} = -\frac{\partial Ep(r)}{\partial r},$$

soit

$$Ep(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \mathrm{cte}.$$

C'est l'énergie potentielle dont dérive la tension du ressort. La constante cte est généralement choisie de manière à ce que Ep soit nulle quand les deux charges sont trop éloignées l'une de l'autre pour interagir : $Ep(r \to \infty) = \mathrm{cte} = 0$.

3.2.3.4. La force d'interaction gravitationnelle

Cette partie n'est pas rédigée ici ; cette force dérive d'une énergie potentielle qui sera calculée dans un chapitre ultérieur.

3.3. Energie mécanique

3.3.1. Le travail des forces conservatives

La définition du travail d'une force sur un trajet C est

$$W_C = \int_C \vec{F}.d\vec{r}. \tag{4}$$

Si $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle, il existe une fonction Ep de l'espace telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Ep), \tag{5}$$

donc en remplaçant la relation (5) dans (4), il vient :

$$W_C = \int_C -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Ep).d\vec{r}.$$

Or par définition du gradient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Ep).d\vec{r} = d(Ep).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} W_C &= -\int d(Ep) \\ W_C &= -[Ep]_{M1}^{M2} \\ W_C &= -\Delta Ep. \end{aligned} \qquad (6)$$

Le travail d'une force conservative (dérivant d'une énergie potentielle) lors d'un déplacement est opposé à la variation de l'énergie potentielle Ep dont dérive la force.

Remarque 3.3 Le travail de cette force ne dépend alors que de l'énergie potentielle de M au point de départ M_1 et au point d'arrivée M_2. Pour le cas particulier des forces conservatives, leur travail ne dépend pas de chemin suivi entre M_1 et M_2.

Remarque 3.4 Le terme "force conservative" se justifie de la manière suivante : si un travail est dépensé pour aller d'un point M_1 à un point M_2, il pourra entièrement être récupéré lors du trajet inverse de M_2 à M_1, car le travail total pour faire un aller et retour est $\Delta Ep_{aller-retour} = Ep(M_1) - Ep(M_1) = 0$.

La relation (6) permet également de calculer l'énergie potentielle partant de la force $\vec{F}$. Ep étant définie à une constante près, choisissons $Ep(M_0) = 0$, par exemple M_0 peut être un point à l'infini (on choisira, quand c'est possible, un potentiel nul quand M est à l'infini). On a alors, pour un trajet de M_0 à M :

$$Ep(M) - Ep(M_0) = -W_C$$

soit

$$Ep(M) = -\int_{M0}^{M} \vec{F}.d\vec{r}.$$

L'énergie potentielle est le travail de la force sur le système partant de M_0 (où le potentiel est nul, par exemple à l'infini) pour aller à la position M considérée.

3.3.2. Définition de l'énergie mécanique

Rappelons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\sum W_C = \Delta Ec.$$

Les forces peuvent alors être séparées en deux catégories : celles qui sont conservatives et celles qui ne le sont pas :

$$\sum W_{cons} + \sum W_{non-cons} = \Delta Ec.$$

En remplaçant le travail des forces conservatives par $-\Delta Ep$:

$$-\Delta Ep + \sum W_{non-cons} = \Delta Ec,$$

soit

$$\begin{aligned} \sum W_{non-cons} &= \Delta (Ec + Ep) \\ \sum W_{non-cons} &= \Delta Em. \end{aligned}$$

Par définition,
l'énergie mécanique notée Em est la somme de l'énergie cinétique Ec et de l'énergie potentielle Ep.

Remarque 3.5 Si toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique totale se conserve (ce qui justifie encore le nom de forces conservatives) :

$$\begin{aligned} \Delta Em &= 0; \\ Ec + Ep &= \text{const}: \end{aligned} \tag{7}$$

Remarque 3.6 L'utilisation de cette relation peut-être une alternative intéressante dans certains cas à l'utilisation du principe fondamental de la dynamique ou du théorème du moment cinétique. En effet, cette égalité a été obtenue à partir du principal fondamental de la dynamique en multipliant ce dernier par la vitesse, puis en intégrant temporellement. C'est pourquoi la relation (8) qui suit est appelée l'intégrale première du mouvement. Pour obtenir la vitesse à tout instant, il est possible d'écrire :

$$Ep + Ec = \frac{1}{2}mv^2 + Ep = Ep_0 + Ec_0; \tag{8}$$

Ep_0 et Ec_0 étant obtenus à un instant t_0 quelconque (par exemple au départ).

3.3.3. Exemples

3.3.3.1. Tir dans le vide

Traité en classe

3.3.3.2. Ressort

Traité en classe

3.3.3.3. Force quelconque dérivant d'un potentiel

Traité en classe

3.4. Equilibre d'un point et condition de stabilité

3.4.1. Définitions

Un point M est en dit en équilibre si, ayant une vitesse nulle au départ, il reste au même endroit.

Son accélération doit être nulle en ce point, ce qui s'écrit (d'après le principe fondamental de la dynamique) :

$$\sum \vec{F}(M) = \vec{0}:$$

Il convient ensuite de distinguer deux types d'équilibres.

Dé…nition
Un équilibre est dit stable, si à la suite d'une perturbation qui l'éloigne de cette position, l'objet y retourne spontanément.

Dans le cas contraire, un équilibre est dit instable.

Exemple Une bille placée dans un creux sans vitesse y reste. Si la bille est écartée faiblement du creux puis lâchée, celle-ci y retourne (et éventuellement oscille autour de sa position d'équilibre, ce qui sera étudié dans le chapitre sur les oscillateurs). C'est un équilibre stable. A l'inverse, une bille minutieusement placée sans vitesse initiale au sommet d'une bosse peut y rester, mais à la moindre petite perturbation, la bille s'éloigne et ne revient pas spontanément au sommet de la bosse.

3.4.2. Energie et équilibre

Limitons l'étude au cas où toutes le forces dérivent d'une énergie potentielle. Notons Ep la somme des énergies potentielles. A l'équilibre, la somme des forces est nulle donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(Ep) = 0:$$

C'est la condition que doit véri…er l'énergie à l'équilibre.

Par la suite, l'étude est limitée à une énergie potentielle ne dépendant que d'une seule variable. Si Ep ne dépend que de x par exemple, alors la condition d'équilibre en $x = x_{eq}$ est :

$$\frac{dEp}{dx}(x = x_{eq}) = 0:$$

L'équilibre de M correspond à un extremum (maximum ou minimum) de la fonction Ep en x_{eq}.

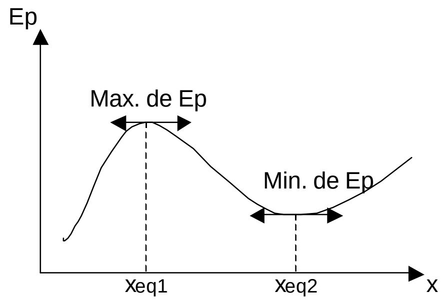

Fig.3.1. Une position d'équilibre stable correspond à un minimum de la fonction Ep (ici en xeq2) ; à l'inverse, une position d'équilibre instable correspond à un maximum de Ep (ici en xeq1).

Mais que peut-on dire de la stabilité ?

Notons Ep0 la fonction dérivée simple de Ep et Ep" sa dérivée seconde. D'après la relation (5), Ep0 est l'opposée de la force. A l'équilibre : $Ep0(x = x_{eq}) = 0$. L'équilibre est stable si :

- quand M est écarté sur la droite de la position d'équilibre ($x > x_{eq}$), la force le ramène vers la gauche et est donc négative : $Ep0(x > x_{eq}) > 0$;

- quand M est écarté sur la gauche de la position d'équilibre ($x < x_{eq}$), la force le ramène vers la droite et est donc positive : $Ep0(x < x_{eq}) < 0$.

Globalement, autour de x_{eq}, la pente de $Ep'(x)$ doit donc être positive. La pente de $Ep'(x)$ est donnée par sa dérivée qui est Ep", ce qui donne Ep" $(x < x_{eq}) > 0$.

Le raisonnement est inversé pour une position d'équilibre instable.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant.

	Condition sur $\vec{F}$	Condition sur Ep
Equilibre	$\sum \vec{F}(x = x_{eq}) = \vec{0}$	$Ep'(x = x_{eq}) = 0$
Stable	$\sum \vec{F}$ (x À x_{eq}) ramène vers x_{eq}	$Ep''(x = x_{eq}) > 0$
Instable	$\sum \vec{F}$ (x À x_{eq}) éloigne de x_{eq}	$Ep''(x = x_{eq}) < 0$