Chapitre 5 Les oscillations forcées

5.1. Position du problème et mise en équation

Premier cas

Considérons un oscillateur harmonique unidimensionnel composé d'une masse m accrochée en un point M au bout d'un ressort de raideur et subissant un frottement fluide. L'autre extrémité A du ressort est fixe. Le tout est placé sur un support horizontal de sorte que le poids n'intervienne pas. Appliquons une force extérieure $F(t) = F_0 \cos \omega t$ sur la masse. Les forces s'appliquant sur la masse sont : la force de rappel du ressort, le frottement fluide et $F(t)$. Le principe fondamental de la dynamique donne, en appelant X l'écart avec la position d'équilibre :

$$m \ddot{X} = -h \dot{X} - kX + F(t)$$

soit

$$m \ddot{X} + h \dot{X} + kX = F_0 \cos \omega t.$$

Deuxième cas

Considérons le même problème que ci-dessus, mais sans la force extérieure $F(t)$. Par contre l'autre extrémité A du ressort n'est plus fixe, mais varie sinusoïdalement : $x_A(t) = x_0 \cos \omega t$. La vibration de A peut être créée artificiellement en laboratoire par un pot vibrant, ou naturellement par les irrégularités de la route pour un amortisseur de voiture, ou par les oscillations de la Terre dans le cas d'un sismographe. L'allongement du ressort est l'allongement de l'extrémité M à laquelle on ajoute l'allongement de l'extrémité A ce qui s'écrit $\Delta l = X - x_A$. Les forces sont : la force de rappel du ressort ainsi que le frottement. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m \ddot{X} = -h \dot{X} - k\,(X - x_A)$$

soit

$$m \ddot{X} + h \dot{X} + kX = kx_0 \cos \omega t.$$

Finalement, faire vibrer l'autre extrémité du ressort ou appliquer directement une force extérieure à la masse m revient au même, en posant $F_0 = kx_0$. Le problème consiste à résoudre une équation différentielle avec second membre variable qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{X} + 2\alpha \dot{X} + \omega_0^2 X = a \cos \omega t \tag{1}$$

avec $2\alpha = h/m$, $\omega_0^2 = k/m$ et $a = F_0/m$ ou $a = kx_0/m$. C'est l'objectif du paragraphe qui suit.

5.2. Résolution

La solution de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière. Compte tenu de la présence d'un amortissement, la solution de l'équation sans second membre tend vers 0. au bout d'un temps suffisamment important, seule la solution particulière reste non nulle. Pour décrire le régime transitoire, il est nécessaire d'écrire la solution complète qui dépend des conditions initiales (constantes dans la solution de l'ESSM). Seul le **régime forcé** (appelé aussi régime sinusoïdal forcé ou régime permanent) est étudié ici. Pour le décrire, il suffit de rechercher la solution particulière (pour laquelle, rappelons le, les conditions initiales n'ont aucune importance).

La méthode de recherche de la solution particulière d'une équation différentielle avec second membre sinusoïdal a déjà été donnée en électronique. La même équation (1) a été obtenue pour décrire un circuit RLC alimenté par un GBF. Les complexes sont introduits. Le terme $a\cos\omega t$ devient $a\exp(j\omega t)$; l'équation (1) s'écrit :

$$\ddot{\underline{X}} + 2\alpha\,\dot{\underline{X}} + \omega_0^2\underline{X} = a\exp(j\omega t)\,.$$

Comme en électronique, nous allons rechercher une solution particulière sinusoïdale de même pulsation ω que l'excitation du second membre, d'amplitude A et déphasé de φ :

$$X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\,,$$

qui s'écrit en complexes :

$$\begin{aligned} \underline{X} &= A\exp(j(\omega t + \varphi)) \\ &= A\exp(j\varphi)\exp(j\omega t + \varphi) \qquad (2) \\ &= \underline{A}\exp(j\omega t) \qquad (3) \end{aligned}$$

avec $\underline{A} = A\exp(j\varphi)$. La solution (3) doit vérifier l'équation (1) ; vérifions le en injectant (3) dans (1) :

$$\underline{A}\left(-\omega^2\right)\exp(j\omega t) + 2\alpha\underline{A}(j\omega)\exp(j\omega t) + \omega_0^2\underline{A}\exp(j\omega t) = a\exp(j\omega t)\,,$$

ce qui donne, après simplification par $\exp(j\omega t)$:

$$\underline{A}\left(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2\right) = a$$

ou encore

$$\underline{A} = \frac{a}{(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2)}. \qquad (4)$$

Revenons à la solution réelle. Celle-ci est :

$$X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad (5)$$

avec

$$A = |\underline{A}| = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \qquad (6)$$

et

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)[\pi]\,. \qquad (7)$$

5.3. Résonance en élongation

A dans l'expression (6) représente l'amplitude des oscillations de la masse (ou élongation). φ dans l'expression (7), représente le déphasage des oscillations par rapport à la force excitatrice (dans le cas 1) ou par rapport à l'oscillation de l'autre extrémité du ressort (dans le cas 2). Etudier la réponse en élongation consiste à étudier la fonction $A(\omega)$. Cette fonction est représentée sur la figure 5.1 pour différentes valeurs de l'amortissement α.

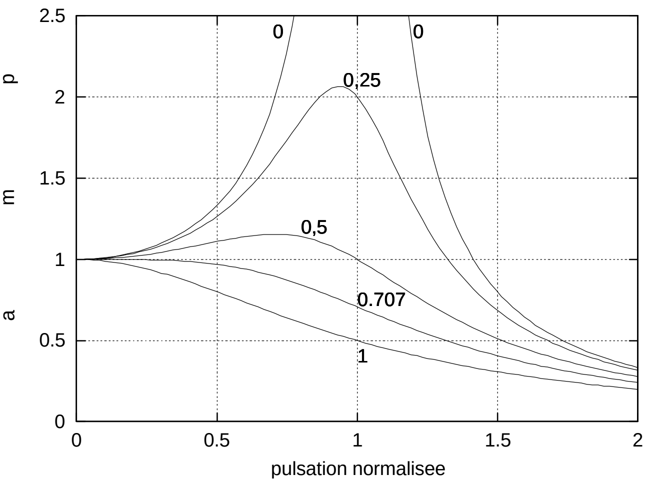

Fig.5.1. Amplitude de l'oscillation de la masse en fonction de la pulsation. Les valeurs indiquées sur les courbes correspondent à α/ω_0. En abscisse : $A.\left(\omega_0^2/a\right)$, en ordonnée : ω/ω_0. La courbe présente un maximum seulement quand $\alpha/\omega_0 < \sqrt{2} \approx 0,707$.

Pour de très faibles pulsations ($\omega \to 0$), l'inertie de la masse a peu d'importance, ce qui signifie, par exemple dans le cas 2, que $A = x_0$: la masse "suit" le déplacement de l'autre extrémité du ressort. Pour de grandes pulsations ($\omega \to \infty$), au contraire, l'inertie de la masse fait que celle-ci ne "peut plus suivre" le mouvement : l'amplitude des oscillations tend vers 0. Pour des pulsations intermédiaires, il y a deux cas de figure. Si l'amortissement n'est pas trop important avec $\alpha < \sqrt{2}$, la courbe présente un maximum pour une pulsation notée $\omega_{\max}$ que l'on appelle **pulsation de résonance**. Si l'amortissement est plus important avec $\alpha > \sqrt{2}$, la courbe ne présente pas de maximum (voir figure 5.1).

Retrouvons ces résultats par le calcul en partant de l'expression (6). Le maximum de A, s'il existe, correspond au minimum de $D(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + (2\alpha\omega)^2$. Dérivons $D(\omega)$ et annulons sa dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{dD(\omega)}{d\omega} &= 2\,(-2\omega)\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\alpha^2\omega \\ 0 &= \omega\left(-4\omega_0^2 + 4\omega^2 + 8\alpha^2\right) \end{aligned}$$

de solution $\omega = 0$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$. Le maximum n'existe que si $\alpha < \omega_0/\sqrt{2}$. Il est placé en $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ et vaut $A_{\max} = a/\left(2\alpha\omega\right)$. Le maximum est d'autant plus marqué que l'amortissement α est faible.

Remarque 5.1 *La pulsation de résonance est différente de la pulsation propre : $\omega_{\max} \neq \omega_0$.*

Plus l'amortissement est faible, plus la pulsation de résonance se rapproche de ω_0. Dans le cas limite sans amortissement ($\alpha = 0$) la résonance est infinie ($A \to \infty$), et la pulsation de résonance coïncide avec ω_0. En réalité, il existe toujours un peu d'amortissement ; mais une trop forte oscillation proche de la fréquence de résonance peut détruire l'oscillateur.

Remarque 5.2 *Le cas de l'oscillateur forcé sans amortissement est très particulier. Il convient de préciser que c'est le seul cas pour lequel la solution de l'équation sans second membre ne tend pas vers 0 ! Pour déterminer $X(t)$, il est alors nécessaire de donner la solution complète sans oublier la solution de l'ESSM, et d'utiliser les conditions initiales pour déterminer cette dernière.*

5.4. Résonance en vitesse

Pour calculer la réponse en vitesse, revenons à l'expression de l'élongation : $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. La vitesse est

$$V(t) = \frac{dX(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)\,.$$

L'amplitude de la vitesse est

$$\begin{aligned} V_0 &= A\omega = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{\left(\omega_0^2/\omega^2 - 1\right)^2 + (2\alpha)^2}}. \end{aligned}$$

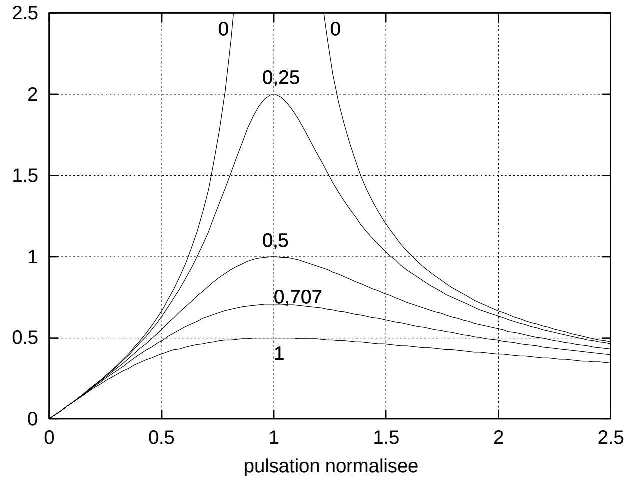

Fig.5.2. Amplitude de la vitesse de la masse en fonction de la pulsation. Les valeurs indiquées sur les courbes correspondent à α/ω_0. En abscisse : $A.\left(\omega_0^2/a\right)$, en ordonnée : ω/ω_0. La courbe présente un maximum pour toute valeur de α, situé en $\omega = \omega_0$.

Le maximum existe toujours et se produit pour le minimum de

$$D_2(\omega) = \left(\omega_0^2/\omega^2 - 1\right)^2 + (2\alpha)^2,$$

soit pour $\omega = \omega_0$ (voir figure 5.2) et vaut

$$V_{0\,\max} = a/(2\alpha).$$

5.5. Etude énergétique

Rédaction ultérieure

5.6. Analogies électro-mécaniques

Rédaction ultérieure