

Chapitre 7

Les changements de référentiels

7.1. Introduction

7.1.1. Position du problème

L'étude des trajectoires diffère selon le référentiel dans lequel on se place. Par exemple, observons la valve d'une roue d'un vélo en mouvement en se plaçant au bord de la roue : la trajectoire est une cycloïde. En effectuant la même observation assis sur le vélo en mouvement, on ne verra qu'une trajectoire circulaire. Dans les deux référentiels, la trajectoire du point sur la roue est donc différent ; il en est de même pour la vitesse, mais également à priori de l'accélération.

Cela pose également le problème de l'application du principe fondamental de la dynamique. Comme nous l'avons vu précédemment, celui-ci s'applique dans tout référentiel Galiléen. Comment alors effectuer une étude dynamique en référentiel non Galiléen ? Les forces sont *a priori* les mêmes, alors que l'accélération du point étudié est différent. Peut-on tout de même généraliser le principe fondamental de la dynamique ? On verra dans ce chapitre que le PFD peut effectivement se généraliser dans les référentiels non Galiléens mais à condition d'ajouter des forces que l'on appellera forces d'inertie.

7.1.2. Définitions

Avant d'aborder l'étude proprement dite du changement de référentiel, il est nécessaire de poser un certain nombre de définitions.

Définition du point coïncident

Soit un référentiel R supposé fixe. Soit un autre référentiel R' mobile par rapport à R . L'étude a pour objet un point M qui se déplace. On appelle **point coïncident** P , le point fixe de R' qui à l'instant t coïncide avec le point M .

Pour imaginer ce qu'est le point coïncident, imaginons un voyageur M marchant dans un train lui-même en mouvement. Le référentiel fixe R est lié à l'extérieur du train (le paysage). Le référentiel en mouvement R' est celui qui est lié au train et avance avec le train. A un instant t , la chaussure de la personne laisse une marque sur le plancher. Le point coïncident à cet instant t est la marque P laissée par la personne.

Remarque 7.1 *A un instant t' ultérieur, le point P est différent du point M (la personne a continué sa marche dans le train). On peut alors définir un nouveau point coïncident P' qui sera la nouvelle marque laissée par sa chaussure à t' .*

Remarque 7.2 *Si à l'instant t on a $P = M$, on a toutefois à priori $\vec{v}(P) \neq \vec{v}(M)$. La vitesse de la marque laissée par la chaussure est différente de la vitesse du voyageur (sauf évidemment si ce dernier reste immobile dans le train !)*

Autres définitions

On appelle **vitesse absolue** (respectivement accélération absolue) la vitesse du point M (respectivement l'accélération de M) dans le référentiel **fixe** \mathbf{R} .

On appelle **vitesse relative** (respectivement accélération relative) la vitesse du point M (respectivement l'accélération de M) dans le référentiel **mobile** \mathbf{R}' .

On appelle **vitesse d'entraînement** (respectivement accélération d'entraînement) la vitesse du point \mathbf{P} **coïncident** (respectivement l'accélération de P) dans le référentiel fixe R .

Dans l'exemple du voyageur, la vitesse absolue est la vitesse du voyageur par rapport à l'extérieur; la vitesse relative est la vitesse du voyageur par rapport au train, et la vitesse d'entraînement est la vitesse de la marque de la chaussure sur le plancher (laquelle se trouve "entraînée" par le train).

Mathématiquement, la vitesse relative est donc, en appelant O l'origine du référentiel cartésien lié à R et O' celui lié à R' :

$$\vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R'}$$

et la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/R}$$

Pour déterminer une relation entre les vitesses absolues et relatives, il est nécessaire de savoir dériver des vecteurs dans différents référentiels : le vecteur position \overrightarrow{OM} pour la vitesse relative, et le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ pour la vitesse absolue. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

Remarque 7.3 Les vecteurs position \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{O'M}$ du même point M (respectivement dans R et dans R') sont différents, car $O' \neq O$.

7.2. Dérivation d'un vecteur par rapport au temps

Soit R un référentiel (associé au repère cartésien de centre O et d'axes Ox , Oy , Oz) supposé fixe, et R' un référentiel en mouvement par rapport à R , associé à un repère cartésien de centre O' et d'axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Le mouvement de R' peut se décomposer de la manière suivante :

- une translation du centre O' (dans le référentiel R);
- une rotation des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ (par rapport aux axes Ox , Oy , Oz).

Remarque 7.4 Il ne faut pas confondre translation et mouvement rectiligne. La translation de R' par rapport à R est le mouvement **du point** O' ; ce mouvement peut être quelconque (éventuellement suivre un cercle!). La rotation de R' par rapport à R est le **changement de direction des seuls axes** $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ par rapport aux axes Ox , Oy , Oz (sans rapport avec la trajectoire du point O')

On appelle $\vec{\omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de R' par rapport à R , avec

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \vec{k}$$

$\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation.

Soit \vec{A} un vecteur mobile.

Il est possible de montrer :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}. \quad (1)$$

La démonstration est effectuée en classe.

Cette relation (1) va permettre de donner des relations entre les vitesses relatives et absolues en remplaçant \vec{A} par le vecteur position, puis dans un second temps entre les accélérations en remplaçant \vec{A} par les vecteurs vitesses.

7.3. Loi de composition des vitesses

Soient R et R' les deux référentiels précédemment définis.

On note $\vec{\omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de R' par rapport à R .

Soit M un point de masse m en déplacement par rapport aux référentiels R et R' .

Par définition des vitesses, on peut écrire la vitesse absolue :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/R}$$

et la vitesse relative

$$\vec{v}(M)_{/R'} = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{/R'}.$$

La loi de composition des vitesses s'obtient alors en décomposant le vecteur \vec{OM} en passant par le point O' et en utilisant la relation (1) :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_{/R} &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d(\vec{OO'} + \vec{O'M})}{dt}\right)_{/R} \\ &= \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{/R} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{/R} \\ &= \vec{v}(O')_{/R} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{/R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \quad (2)$$

que l'on appelle loi de composition des vitesses.

Cette loi peut s'écrire également en fonction de la vitesse d'entraînement du point M notée $\vec{v}_e(M)$ qui est la vitesse du point P coïncident au point M à l'instant t mais restant immobile dans R' . En utilisant la relation (2), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{v}_e(M) &= \vec{v}(P)_{/R} = \vec{v}(P)_{/R'} + \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'P} \\ &= \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}. \end{aligned}$$

En conclusion, la loi de composition des vitesses (2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/R} = \overrightarrow{v}(M)_{/R'} + \overrightarrow{v}_e(M) \quad (3)$$

avec

$$\overrightarrow{v}_e(M) = \overrightarrow{v}(O')_{/R} + \overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}, \quad (4)$$

valable quel que soit le type de mouvement de R' et de M .

Remarque 7.5 *La relation (3) est assez intuitive : la vitesse du voyageur par rapport à l'extérieur est sa vitesse par rapport au train (relative) additionnée à la vitesse qu'il aurait s'il s'arrêtait de marcher et se laissait entraîner par le train (vitesse d'entraînement)*

Remarque 7.6 *La vitesse d'entraînement (4) comporte deux termes : $\overrightarrow{v}(O')_{/R}$ est l'entraînement lié à la translation de R' par rapport à R ; $\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$ est l'entraînement lié à la rotation (par exemple sur un manège tournant).*

Cas particulier : si le référentiel R' est en mouvement de translation (pas nécessairement rectiligne!) : $\overrightarrow{\omega}_{R'/R} = \overrightarrow{0}$, on a alors tout simplement

$$\overrightarrow{v}(M)_{/R} = \overrightarrow{v}(M)_{/R'} + \overrightarrow{v}(O')_{/R}.$$

7.4. Loi de composition des accélérations

Soient R et R' les deux référentiels précédemment définis.

Soit M un point de masse m en déplacement par rapport aux référentiels R et R' .

Par définition des accélérations, on peut écrire :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R}}{dt} \right)_{/R}$$

et

$$\overrightarrow{a}(M)_{/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R'}}{dt} \right)_{/R'}.$$

La loi de composition des accélérations s'obtient en dérivant la loi de composition des vitesses (2) :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R}}{dt} \right)_{/R} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{v}(M)_{/R'} + \overrightarrow{v}(O')_{/R} + \overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)_{/R}.$$

Le premier terme peut s'écrire, en utilisant la relation (1) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R'}}{dt} \right)_{/R} &= \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M)_{/R'}}{dt} \right)_{/R'} + \overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R'} \\ &= \overrightarrow{a}(M)_{/R'} + \overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R'}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est :

$$\left(\frac{d(\overrightarrow{v}(O')_{/R})}{dt} \right)_{/R} = \overrightarrow{a}(O')_{/R}.$$

Le troisième terme devient :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)}{dt} \right)_{/R} &= \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R} \\
 &= \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \\
 &= \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right).
 \end{aligned}$$

Finalement en regroupant tous les termes :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(M)_{/R} &= \vec{a}(M)_{/R'} & (5) \\
 &\quad + \vec{a}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} \\
 &\quad + 2 \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}.
 \end{aligned}$$

appelée loi de composition des accélérations.

Cette loi peut s'écrire également en fonction de l'accélération d'entraînement du point M notée $\vec{a}_e(M)$ qui est l'accélération du point P coïncident au point M à l'instant t mais restant immobile dans R' . En utilisant la relation (5), il vient donc :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(P)_{/R} = \vec{a}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

car $\vec{v}(P)_{/R'} = \vec{0}$ et $\vec{a}(P)_{/R'} = \vec{0}$.

Le troisième terme de la loi (5) est appelé l'accélération de Coriolis et noté $\vec{a}_c(M)$.

En conclusion, la loi de composition des accélérations (2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) \quad (6)$$

avec

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \left(\frac{d \vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

et

$$\vec{a}_c(M) = +2 \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}.$$

La loi de composition des accélérations (6) est valable quel que soit le type de mouvement de R' et de M .

Cas particuliers :

- Si le référentiel R' est en mouvement de translation (pas nécessairement rectiligne!) par rapport à R : $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$, on a alors tout simplement

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}(O')_{/R}.$$

- Si le référentiel R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R (c'est à dire qu'en plus, le point O' n'a pas d'accélération) :

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'};$$

les accélérations du point M sont les mêmes dans les deux référentiels.

Remarque 7.7 Soient $R1$ et $R2$, deux référentiels Galiléens ; plaçons y une masse pseudo-isolée en M . Le principe d'inertie s'y applique : une masse pseudo-isolée suit un mouvement rectiligne uniforme, donc $\vec{a}(M)_{/R1} = \vec{a}(M)_{/R2} = \vec{0}$. Ce principe reste valable quelle que soit la vitesse du point M , donc quelle que soit $\vec{v}(M)_{/R2}$. On peut donc en conclure que

$$\vec{a}_e(M) = +2\vec{\omega}_{R2/R1} \wedge \vec{v}(M)_{/R2} = \vec{0}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(M) &= \vec{a}(O')_{/R1} + \vec{\omega}_{R2/R1} \wedge \left(\vec{\omega}_{R2/R1} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \\ &+ \left(\frac{d\vec{\omega}_{R2/R1}}{dt} \right) \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (8)$$

La relation (7) est vérifiée quelle que soit la vitesse, donc $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$; la relation (8), sachant que $\vec{\omega}_{R2/R1} = \vec{0}$ donne alors : $\vec{a}(O')_{/R1} = \vec{0}$. Conclusion ; si $R1$ et $R2$ sont Galiléens :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{R1/R2} &= \vec{0}, \\ \vec{a}(O')_{/R1} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Deux référentiels Galiléens sont en **translation rectiligne uniforme entre eux**.

Il est alors possible d'écrire que pour tout point M' en mouvement quelconque dans $R1$ et $R2$:

$$\vec{a}(M')_{/R1} = \vec{a}(M')_{/R2}.$$