Chapitre 8 Dynamique du point en référentiel non Galiléen

8.1. Introduction

8.1.1. Rappels

- Par définition, un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique : un objet isolé (c'est à dire ne subissant aucune force) suit un mouvement rectiligne uniforme.
- Tout référentiel $R\prime$ en translation rectiligne par rapport à un autre référentiel Galiléen est lui même Galiléen.

Exemple de référentiel Galiléen : le référentiel de Copernic (de centre le centre du système solaire et ses trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines ("fixes").

8.1.2. Position du problème

Le principe fondamental de la dynamique a été donné dans un référentiel Galiléen R :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M)_{/R}. \tag{1}$$

Or les forces ne sont pas modifiées par un changement de référentiel. De plus, les référentiels Galiléens étant en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, l'accélération du point M est identique dans ces différents référentiels. Le principe (1) reste donc inchangé quel que soit le référentiel, pourvu qu'il soit Galiléen.

Toutefois, le principe fondamental de la dynamique (1) ne peut pas être appliqué directement dans un référentiel non Galiléen $R\prime$. En effet, les forces sont inchangées entre le référentiel Galiléen R et le référentiel R ; pourtant, si $R\prime$ est accéléré par rapport à R, l'accélération du point M est différente dans les référentiels R et $R\prime$. Il y a alors contradiction avec le principe (1).

L'objectif de ce chapitre est de généraliser le principe fondamental de la dynamique en référentiel non Galiléen. Cette généralisation est d'autant plus nécessaire que de très nombreuses études s'effectuent en référentiel non Galiléen.

8.1.3. Exemple de référentiels non Galiléen

En fait, le référentiel terrestre lui même, dans lequel nous évoluons tous les jours, n'est pas Galiléen. Une expérience réalisée sur un temps très long (plusieurs heures ou jours) peut mettre en évidence son caractère non Galiléen. Toutefois, si l'expérience s'effectue sur un temps très inférieur à la journée, on pourra généralement considérer le référentiel comme étant quasiment Galiléen.

Le référentiel lié à un wagon ou une voiture n'est pas Galiléen. Pour pouvoir expliquer et décrire la "force" qui nous pousse vers l'avant lors d'un freinage brusque, ou vers le coté dans un virage, des forces d'inertie apparaissant dans les référentiels Galiléen vont être introduits.

Le référentiel lié à un plateau tournant (manège) n'est pas non plus Galiléen. Un rotation trop rapide de ce manège tend à éjecter les objets ou personnes placées sur ce dernier vers l'extérieur : il y a apparition d'une force d'inertie centrifuge liée au caractère non Galiléen de ce référentiel.

8.2. Le principe fondamental de la dynamique en référentiel non Galiléen

8.2.1. Enoncé du principe fondamental de la dynamique

Soient R un référentiel Galiléen et $R\prime$ un référentiel non Galiléen. Soit M un point de masse m soumis à des champs de forces $\overrightarrow{F}$ et en déplacement dans le référentiel $R\prime$.

Compte tenu des connaissances acquises dans les chapitres précédents, il est possible d'appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R Galiléen, et donc de relier les forces à l'accélération de M dans R. D'autre part, connaissant la loi de composition des accélérations de R à $R\prime$, il est possible de relier l'accélération de M dans R Galiléen à l'accélération de M dans$R\prime$ non Galiléen. Il n'y a donc finalement plus d'obstacle pour pouvoir donner une relation entre l'accélération du point M dans le référentiel $R\prime$ non Galiléen et les forces. L'objectif de ce paragraphe est de déterminer cette relation, qui est une généralisation du principe fondamental de la dynamique en référentiel non Galiléen.

Rappel : la loi de composition des accélérations entre les référentiels R et $R\prime$ est :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/R} = \overrightarrow{a}(M)_{/R'} + \overrightarrow{a}_e(M) + \overrightarrow{a}_c(M) \tag{2}$$

avec

$$\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{a}(O')_{/R} + \overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{\omega}_{R'/R}}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

et

$$\overrightarrow{a}_c(M) = 2\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R'}.$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Galiléen R :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M)_{/R}.$$

Compte tenu de la loi de composition des accélérations (2), il vient :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\left(\overrightarrow{a}(M)_{/R'} + \overrightarrow{a}_e(M) + \overrightarrow{a}_c(M)\right),$$

que l'on écrit généralement plutôt sous la forme

$$\sum \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}_e(M) - m\overrightarrow{a}_c(M) = m\overrightarrow{a}(M)_{/R'}. \tag{3}$$

Cette dernière relation (3) est une généralisation du principe fondamental de la dynamique en référentiel non Galiléen. Il suffit donc d'ajouter deux termes supplémentaires, homogènes à des forces, que l'on appelle respectivement :

-forces d'inertie d'entraînement avec

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{ie} &= -m\overrightarrow{a}_e(M) \\ &= -m\overrightarrow{a}(O')_{/R} - m\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \\ &\quad -m\left(\frac{d\overrightarrow{\omega}_{R'/R}}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O'M}\end{aligned} \qquad (4)$$

-et force d'inertie de Coriolis avec

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{ic} &= -m\overrightarrow{a}_c(M) \\ &= -2m\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R'}.\end{aligned} \qquad (5)$$

Remarque 8.1 *La force d'inertie de Coriolis n'existe que si le point M se déplace dans le référentiel d'étude $R\prime$. Un point immobile dans le référentiel R ne subit donc, outres les forces habituelles, que la force d'inertie d'entraînement.*

8.2.2. Le référentiel en simple translation

Ce cas est traité en classe.

Résultat : pour un référentiel $R\prime$ non Galiléen dont le centre $O\prime$ est accéléré dans R, mais dont les axes ne subissent aucune rotation ($\overrightarrow{\omega}_{R'/R} = \overrightarrow{0}$), les forces d'inertie s'écrivent tout simplement (partant de (4) et (5)) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{ie} &= -m\overrightarrow{a}(0')_{/R} \\ \overrightarrow{F}_{ic} &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

8.2.3. Le référentiel en simple rotation uniforme

Ce cas est traité en classe

Résultat : pour un référentiel $R\prime$ non Galiléen dont le centre $O\prime$ reste confondu au centre O de R (ou plus généralement $O\prime$ en translation rectiligne uniforme dans R), mais dont les axes subissent une rotation uniforme $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{cte}$, la force d'inertie d'entraînement s'écrit (partant de (4)) :

AJOUTER UNE FIGURE!

$$\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = mr\omega^2\overrightarrow{u_r}.$$

La force d'inertie (5) reste inchangée.

8.3. Le théorème du moment cinétique en référentiel non Galiléen

Dans un référentiel Galiléen R, le théorème du moment cinétique appliqué en un point P

quelconque à un point M de masse m soumis à des forces de moment $\overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{F})}$ s'écrit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_P(M)}{dt}\right)_{/R} = \left(\sum \overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{F})}\right)_{/R}.$$

Rappel : ce théorème a été démontré à partir du principe fondamental de la dynamique (chapitre "dynamique du point").

En reprenant la même démonstration, mais partant du principe fondamental de la dynamique (3) en référentiel non Galiléen $R\prime$, on montre que ce théorème se généralise sans difficulté dans un référentiel, tout simplement en ajoutant les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis précédemment définies :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_P(M)}{dt}\right)_{/R'} = \left(\sum \overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{F})}\right)_{/R'} + \overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{Fie})} + \overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{Fic})} \tag{6}$$

avec

$$\overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{Fie})} = \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{F}_{ie}$$

et

$$\overrightarrow{M}_{P(\overrightarrow{Fic})} = \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{F}_{ic}.$$

8.4. La puissance et l'énergie cinétique en référentiel non Galiléen

Dans un référentiel Galiléen R, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un point M de masse m et soumis à des forces $\overrightarrow{F}$ dont le travail, pour aller d'un point A à un point B en suivant un chemin C est :

$$\Delta Ec = W_C(\overrightarrow{F}).$$

Rappel : le théorème de l'énergie cinétique été démontré à partir du principe fondamental de la dynamique (chapitre "dynamique du point").

En reprenant la même démonstration, mais partant du principe fondamental de la dynamique (3) en référentiel non Galiléen $R\prime$, on montre que ce théorème se généralise sans difficulté dans un référentiel, tout simplement en ajoutant le travail des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis précédemment définies :

$$\Delta Ec = W_C(\overrightarrow{F}) + W_C(\overrightarrow{F}_{ie}) + W_C(\overrightarrow{F}_{ic}).$$

Remarque 8.2 *Le travail de la force d'inertie de Coriolis est toujours nul. En effet :*

$$W_C(\overrightarrow{F}_{ic}) = \int \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}.dt = \int \left(-2m\overrightarrow{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/R'}\right).\overrightarrow{v}(M)_{/R'}.dt = 0.$$

La force de Coriolis s'appliquant toujours orthogonalement à la vitesse, cette force ne travaille pas.

Le théorème de l'énergie cinétique en référentiel non Galiléen $R\prime$ peut donc se résumer en :

$$\Delta Ec = W_C(\overrightarrow{F}) + W_C(\overrightarrow{F}_{ie}). \tag{7}$$

Remarque 8.3 *La force d'inertie d'entraînement dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? La réponse dépend en fait du type de mouvement de $R\prime$ par rapport à R. Dans les deux cas les plus classiquement étudiés correspondant à une rotation uniforme (le "plateau tournant") d'une part et à une translation rectiligne uniformément accélérée d'autre part, la force d'inertie d'entraînement est effectivement conservative.*

Exemple du plateau tournant :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = mr\omega^2 \overrightarrow{u}_r.$$

L'énergie potentielle Ep si elle existe vérifie la relation

$$mr\omega^2 = -\frac{dEp(r)}{dr}$$

soit

$$Ep(r) = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + cst.$$

Exemple du mouvement uniformément accéléré $\overrightarrow{a}_0$:

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a}_0 = -ma_0\overrightarrow{u}_x,$$

soit

$$-ma_0\overrightarrow{u}_x = -\frac{dEp(x)}{dx}$$

donc finalement

$$Ep(x) = ma_0 x.$$