Chapitre 2

Transfert thermique par conduction

EN COURS DE RÉDACTION

2.1 Les divers modes de transport de l'énergie thermique

Les modes de transfert thermique sont de 3 types : la diffusion thermique, la convection thermique, et le rayonnement.

2.1.1 La diffusion thermique

La **diffusion thermique**, appelée aussi **conduction thermique**, est un transfert d'énergie thermique qui s'effectue sans déplacement global de matière, et qui est dirigé de la température la plus élevée vers la température la plus basse.

Elle tend donc à rééquilibrer les températures : c'est un phénomène irréversible.

Une température élevée est une énergie cinétique microscopique élevée (agitation thermique), et ce sont les chocs entre les particules qui transfèrent leur énergie cinétique, donc rééquilibrent les énergies cinétiques.

2.1.2 La convection thermique

La **convection thermique** est le transfert thermique lié à un **fluide en mouvement**. En se déplaçant (mouvement d'ensemble, donc macroscopique), le fluide transporte son énergie thermique.

Les fluides, comme l'air ou l'eau sont en permanence en mouvement, même s'ils ont une apparence "calme". Ils sont le siège d'advection et de micro-convection. le moindre petit échauffement dilate le fluide qui devient plus léger, et donc monte par la poussée d'Archimède (micro-convection).

2.1.3 Le rayonnement thermique

L'énergie thermique peut également se transformer en énergie électromagnétique (onde électromagnétique) : c'est **le rayonnement** du corps noir. L'onde peut également se transformer à nouveau en énergie thermique. Globalement, le rayonnement émis va des micro-ondes à l'ultra-violet, mais pour les températures "ambiantes", elles se situent dans l'infra-rouge.

Ce mode de transport explique pourquoi la température baisse plus fortement les nuits dégagées : l'énergie thermique disparaît et se change en onde électromagnétique, qui s'échappe facilement faute de nuages. Les caméras thermiques captent ces ondes électromagnétiques, et sont utilisées pour "voir" la nuit, ou pour détecter des défauts d'isolation des bâtiments. A l'inverse, l'onde électromagnétique pour se transformer en énergie thermique : c'est ainsi que la température s'élève rapidement au soleil derrière une vitre ou dans une voiture.

2.2 Les équations de base : bilan d'énergie et loi de Fourier

2.2.1 Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique

Entre 2 instants très proches t et $t + \mathrm{d}t$, le premier principe appliqué à un système s'écrit :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}(Ec) = \delta W + \delta Q$$

Il faut être rigoureux dans les notations !
$\mathrm{d}U$ signifie une petite **variation** de U, U étant une fonction d'état.
δW signifie une petite **quantité**, ici un petit travail, et non pas une variation.

Dans ce chapitre, nous étudierons la diffusion thermique, donc *a priori* sans mouvement d'ensemble, donc $Ec = 0$. Nous nous placerons aussi dans la cas d'un milieu à pression constante (sous atmosphère ambiante par exemple). Si il n'y a pas d'autres travaux que les travaux des forces de pression, on a $\delta W_p = -P\mathrm{d}V$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= -P\mathrm{d}V + \delta Q \\ \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V &= \delta Q \\ \mathrm{d}(U + PV) &= \delta Q \end{aligned}$$

car P est constante, et finalement :

$$\mathrm{d}H = \delta Q \qquad \text{à pression constante} \tag{2.1}$$

Nous retrouvons la relation connue à pression constante : $Q = \Delta H$ quand il n'y a pas d'autres travaux que les travaux des forces de pression, mais écrite sous forme infinitésimale.

Il est possible d'écrire la relation (2.1) par unité de temps pour un système immobile :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = P_{\mathrm{th}}} \tag{2.2}$$

avec $P_{\mathrm{th}} = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$ l'énergie thermique entrante dans le système par unité de temps. La dérivée partielle vient du fait que le bilan est effectué sur un système sans mouvement d'ensemble, donc fixe dans l'espace. On verra dans un chapitre ultérieur comment on applique le premier principe de la thermodynamique à un système en mouvement, dans le cas d'un écoulement de fluide.

Cette relation de conservation de l'énergie suppose qu'il n'y a pas d'autres travaux δW que ceux des forces de pression. On dira qu'il n'y a pas de sources d'énergie thermique (comme par exemple un échauffement électrique par effet Joule).

Le second principe de la thermodynamique

Entre 2 instants très proches t et $t + \mathrm{d}t$, le second principe appliqué à un système s'écrit :

$$\mathrm{d}S = \delta S_{\text{échangé}} + \delta S_{\text{créé}} \qquad \text{avec} \qquad \delta S_{\text{créé}} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \delta S_{\text{échangé}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{contact}}}$$

dS signifie une petite **variation** de S, S étant une fonction d'état. $\delta S_{\text{échangé}}$ signifie la petite **quantité** d'entropie échangée et $\delta S_{\text{créé}}$ signifie la petite **quantité** d'entropie créée.

2.2.2 Le bilan d'énergie thermique

Grandeurs

La température
La température T est ici un champ scalaire. A chaque point M de l'espace correspond une température. De plus cette température peut évoluer dans le temps en un point donné. On a donc $T(M,t)$.

Le vecteur densité de courant thermique
Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ est un vecteur dont la direction et le sens est la direction et le sens de déplacement de l'énergie thermique, et dont la norme est **l'énergie thermique se déplaçant par unité de surface et par unité de temps** (ou la puissance thermique par unité de surface).

L'énergie thermique ne se déplace pas forcément de manière uniforme dans tout l'espace. $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(M,t)$ est donc un champ de vecteur : en **chaque point** de l'espace est associé un vecteur $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$, et peut évoluer dans le temps.

Puissance thermique ou flux thermique à travers une surface
Le flux du vecteur $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ à travers une surface S correspond à l'énergie qui traverse S par unité de temps, autrement dit la puissance P_{th} qui traverse la surface S :

$$P_{\text{th}} = \Phi = \iint \overrightarrow{j_{\text{th}}}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Le bilan d'énergie unidirectionnel (1D)

Considérons une barre conductrice thermique de section S constante et placée selon l'axe Ox. On suppose la température homogène sur une section, et les parois latérales calorifugées, de sorte que la température $T(x,t)$ ne dépende pas de y ni de z mais seulement de x et du temps. L'énergie thermique se déplace selon (Ox). Le vecteur $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ s'écrit donc $\overrightarrow{j_{\text{th}}} = j(x,t)\overrightarrow{u_x}$. Sa masse volumique est notée ρ et sa capacité thermique massique à pression constante c_p

SCHÉMA A VENIR

On considère la petite portion de barre située entre x et $x+\mathrm{d}x$, de section S, de petit volume $\delta V = S.\mathrm{d}x$, de petite masse δm et de petite enthalpie δH. Le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ est dirigé selon $\overrightarrow{u_x}$, donc l'énergie thermique entre en x et sort en $x+\mathrm{d}x$.

L'application du premier principe (2.2) donne

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial t} = P_{\text{th entrante}}(x) - P_{\text{th sortante}}(x+\mathrm{d}x) \tag{2.3}$$

Pour une phase condensée (ou un gaz parfait)

$$\begin{aligned} d(\delta H) &= \delta m.c_p.\mathrm{d}T \\ &= (\rho.S.\mathrm{d}x).c_p.\mathrm{d}T \end{aligned}$$

donc par unité de temps (système immobile et seule T dépend du temps) :

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial t} = \rho.S.\mathrm{d}x.c_p.\frac{\partial T}{\partial t}$$

D'autre part, la puissance entrante en x à l'instant t est le flux de $\overrightarrow{j_{\text{th}}}(x,t)$ sur la surface S située en x soit

$$P_{\text{th entrante}}(x,t) = j_{\text{th}}(x,t).S$$

et de même en $x+\mathrm{d}x$ pour la puissance sortante à l'instant t :

$$P_{\text{th sortante}}(x+\mathrm{d}x,t) = j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t).S$$

L'équation 2.3 devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta H)}{\partial t} = \rho.S.\mathrm{d}x.c_p.\frac{\partial T}{\partial t} &= j_{\text{th}}(x,t).S - j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t).S \\ &= -S.(j_{\text{th}}(x+\mathrm{d}x,t) - j_{\text{th}}(x,t)) \\ &= -S.\left(\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\right).\mathrm{d}x \end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = -\rho.c_p.\frac{\partial T}{\partial t}} \tag{2.4}$$

Cette équation est le **bilan local d'énergie thermique 1D**.

Le bilan d'énergie dans l'espace (3D)

A 3 directions, le bilan d'énergie se généralise en :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}\right) = -\rho.c_p.\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.5}$$

2.2.3 La loi phénoménologique de Fourier

Une loi phénoménologique est une loi qui permet de décrire, dans un certain domaine de validité, un phénomène. Cette loi est issue d'observations expérimentales.

Limitons nous dans un premier temps à une diffusion thermique 1D selon x (barre conductrice selon (Ox)) : $T(x,t)$. Une inhomogénéité de température (variation de T selon x) se traduit par une diffusion thermique. On constate expérimentalement que si l'écart de température entre 2 points fixes est doublé, alors le transfert thermique entre ces 2 points est doublé : j_{th} est donc proportionnel à $\partial T/\partial x$. D'autre part, la diffusion se fait dans le sens des températures décroissantes : la constante de proportionnalité est donc négative, ce qui justifie le signe - de la relation qui suit.

On obtient donc la loi de Fourier 1D :

$$\boxed{j_{\mathrm{th}} = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{à 1D}} \tag{2.6}$$

qui se généralise à 3D :

Loi de Fourier

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}} = -\lambda.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(T) \qquad \text{à 3D} \tag{2.7}$$

λ est la **conductivité thermique** en $\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}$.

Donner des valeurs de la conductivité

2.3 L'équation de la diffusion thermique

2.3.1 L'équation de diffusion thermique

L'équation de diffusion 1D

La conservation de l'énergie thermique sans sources (**??**) et la loi de Fourier 1D (2.6) donne un système linéaire de 2 équations à 2 fonctions inconnues $j_{\text{th}}(x,t)$ et $T(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} & = & -\rho.c_p.\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ j_{\text{th}} & = & -\lambda.\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases}$$

En substituant j_{th} de la deuxième ligne dans la première, et en considérant que λ est une constante, il vient l'équation de diffusion 1D :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho.c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x}$$

que l'on note :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \qquad D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho.c_p}} \tag{2.8}$$

C'est **l'équation de diffusion thermique 1D**. D_{th} est le coefficient de diffusion thermique en $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

L'équation de diffusion 3D

La conservation de l'énergie thermique sans sources (2.5) et la loi de Fourier 3D (2.7) donne :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\overrightarrow{j_{\text{th}}}\right) = -\rho.c_p.\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \overrightarrow{j_{\text{th}}} = -\lambda.\overrightarrow{\text{grad}}(T) \end{cases}$$

En substituant j_{th} de la deuxième ligne dans la première, et en considérant que λ est une constante, il vient l'équation de diffusion 1D :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho.c_p}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(T)\right)$$

que l'on note :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}}\, \Delta(T) \qquad \text{avec} \qquad D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho.c_p}} \tag{2.9}$$

C'est **l'équation de diffusion thermique 3D**
Δ est l'opérateur Laplacien scalaire.

2.3.2 Quelques généralités sur les équations de diffusion

Quelques propriétés des équations de diffusion

Le renversement du temps t en $-t$ modifie le signe du membre de gauche de l'équation de diffusion (2.8) ou (2.9) à cause de la dérivée simple, mais pas le signe du membre de droite. L'équation de diffusion n'est donc pas conservée par renversement du temps : la diffusion est un **phénomène irréversible**. En effet, la diffusion thermique ne s'effectue que du chaud vers le froid, mais pas du froid vers le chaud.

C'est une équation différentielle à 2 variables : x pour l'espace et t le temps (voir 4 variables pour l'équation de diffusion 3D). Pour résoudre les équations différentielles à une seule variable t, en régime transitoire d'un système électronique par exemple, il fallait connaître les conditions initiales, sous peine de ne pas pouvoir déterminer certaines constantes dans la solution. Ici, il en est de même avec t à cause de la dérivée temporelle, mais aussi avec x à cause de la dérivée spatiale dans l'équation. Trouver une solution à l'équation différentielle de diffusion demande de manière générale de connaître les conditions initiales (à un t donné) de la distribution de température, mais aussi des **conditions aux limites** (à des x donnés). Par exemple : la barre est-elle infinie ? Ou est-t-elle finie avec une extrémité de température fixée ? Nous verrons quelques unes de ces conditions aux limites dans un paragraphe ultérieur.

Enfin, il n'existe pas de solutions mathématiques explicites connues de ces équations de diffusion. On ne pourra la résoudre "à la main" que dans quelques cas particuliers étudiés en dernière partie de ce chapitre. A défaut, il est nécessaire d'effectuer une modélisation numérique pour les résoudre.

Ordres de grandeurs

On va étudier ici les ordres de grandeur

2.3.3 Les conditions aux limites

2.4 Quelques exemples de solutions des équations de diffusion thermique

2.4.1 Le cas du régime stationnaire : la conductance thermique

2.4.2 L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

2.4.3 L'onde thermique