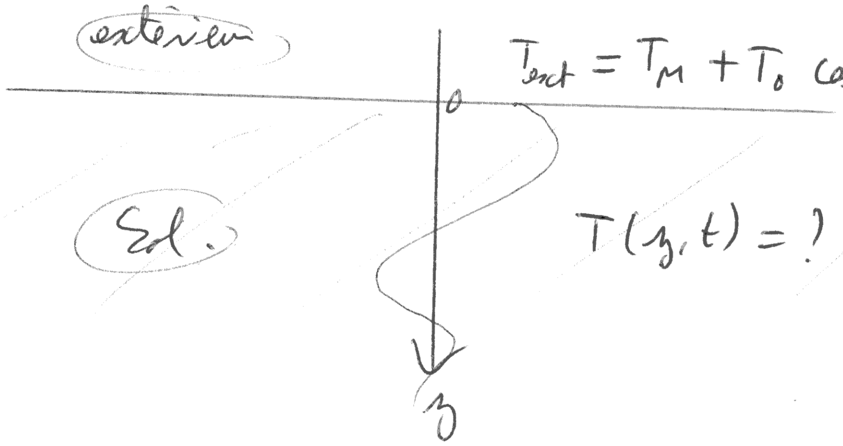
04-1

# Dispersion et absorption d'une onde

## I) Retour sur l'onde thermique et généralisation

<u>Rappel</u> : Nous avons étudié la "propagation" (ou plutôt la diffusion) d'une onde thermique dans le sol.




$T_{ext} = T_M + T_0 \cos(\omega t) = CL$

$T(z,t) = ?\quad (z>0)$

<u>Méthode de résolution</u>

Nous l'équation de diffusion $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (1) (dans $\mathbb{C}$)

Nous recherchons une solution de la forme :

$\underline{T}(z,t) = \overset{A}{T_M} + \overset{B}{T_0}\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$ !

<u>Elle doit vérifier</u> : → la CL → ce qui nous donne A et B

→ l'équation de diffusion. (1)

La solution $\underline{T}(z,t)$ recherchée est de la forme

$e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$, ce qu'on appelle :

↳ <u>pseudo</u> OPPH

04-2

$\underline{T}(z,t)$ est injectée dans (1), ce qui donne

$$j\omega T_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)} = D_{th} (-j\underline{k})^2 T_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)} \quad \forall t \quad \forall z$$

donc $j\omega = -\underline{k}^2 D_{th}$ soit $\underline{k} = \pm \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D_{th}}}$

donc $\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D_{th}}{\omega}}$

Nous avons aussi vu que la seule solution physiquement acceptable est :

$$\underline{k} = (+) \frac{1-j}{\delta}$$

On a donc $\underline{T} = T_M + T_0 e^{j(\omega t - \frac{1-j}{\delta} z)}$

$$= T_M + T_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

<u>Dans $\mathbb{R}$</u> : $\underset{\substack{\uparrow \\ (T \text{ moyenne})}}{T(z,t) - T_M} = \underline{T_0} \underbrace{e^{-\frac{z}{\delta}}}_{\substack{\downarrow \\ \text{Atténuation de l'onde} \\ = \\ \text{Absorption}}} \cos(\omega t - \underbrace{\frac{z}{\delta}}_{\substack{\downarrow \\ \text{Partie propagative}}})$

---

<u>Remarque</u> $\underline{k} = -\left(\frac{1-j}{\delta}\right)$ aurait donné :

$$T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divergent} \\ = \text{absurde !}}}{e^{+\frac{z}{\delta}}} \cos(\omega t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se propage "à l'envers"} \\ = \text{impossible.}}}{+} \frac{z}{\delta})$$

Ok-3

## Généralisation

Pour une équation de propagation différente de d'Alembert : on propose des solutions de la forme pseudo OPPH :

$$\boxed{A\, e^{j(\omega t - \underline{k} x)} \quad \text{avec } \underline{k} \in \mathbb{C}}$$

On injecte cette solution dans l'équation de "propagation" pour vérifier à quelle condition sur $\underline{k}$ elle convient.

On trouve $\boxed{\underline{k} = k' - j k''}$ $\quad k' = \mathrm{Re}(\underline{k})$, $\quad -k'' = \mathrm{Im}(\underline{k})$

<u>Remarque</u> : on a vu que la seule solution physiquement acceptable est $\mathrm{Re}(\underline{k}) > 0 \rightarrow$ Propagation dans le bon sens

et $\mathrm{Im}(\underline{k}) < 0 \rightarrow$ Absorption

<u>En repassant en réel on a :</u>

$$A\, e^{j(\omega t - \underline{k} z)} = A\, e^{j(\omega t - k' z + j k'' z)}$$

$$= A\, \underbrace{e^{-k'' z}}_{\text{Atténuation donnée par } k'' \ (-\mathrm{Im}\,\underline{k})}\; e^{\underbrace{j(\omega t - k' z)}_{\text{Propagation donnée par } k' \ (\mathrm{Re}(\underline{k}))}}$$

04-4

- L'atténuation est $e^{-k''y} = e^{-\frac{y}{\delta}}$ avec $\delta = \frac{1}{k''}$

↳ diminution de l'amplitude.

$\delta$ est la longueur caractéristique d'absorption.

Au bout de 4 à 5 $\delta$, l'onde a quasi-disparue.

- La vitesse de phase est donnée par :

$\omega t - k' y = \varphi = cte$ donc $y = \frac{-cte}{k'} + \frac{\omega}{k'} t$

$v_\varphi$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{\text{caractéristique absorption}} &= \frac{1}{k''} \\ v_\varphi &= \frac{\omega}{k'} \end{aligned}}$$

$k'' \leftarrow |Im(\underline{k})|$

et $k' \leftarrow Re(\underline{k})$

Vitesse de phase

<u>Retour sur l'onde thermique :</u>

$$\delta = \sqrt{\frac{2D_{th}}{\omega}}$$

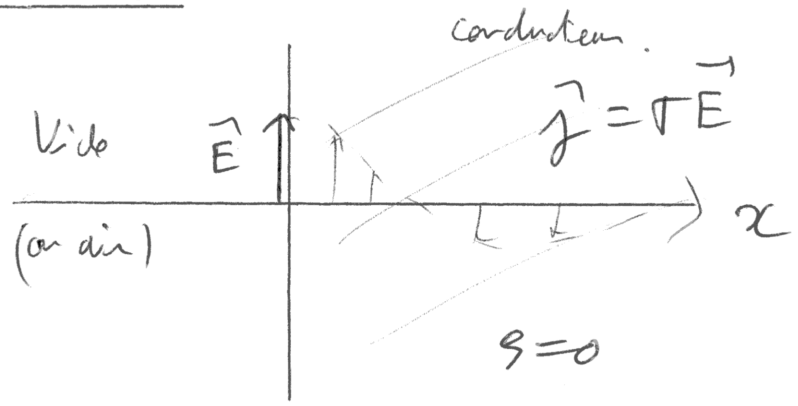
et $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega}{2D_{th}}}} = \sqrt{\omega 2 D_{th}}$ → $v_\varphi$ dépend de $\omega$ !

ce n'est pas une constante mais dépend de la fréquence.

→ il y a dispersion (les ondes de différentes fréquences ont des vitesses de phase différentes)

0-4-3

# II Onde électromagnétique plane dans un conducteur réel




Rappel : . Dans un conducteur, il n'y a pas d'excès de charges : $\rho = 0$

. Par contre, le conducteur étant réel $\sigma \neq \infty$ et il peut y avoir un courant $\vec{j}$ et un champ $\vec{E}$ (et $\vec{B}$)

. Dans un conducteur, on peut généralement faire l'ARQS : $\underbrace{\sigma E}_{j_c} \gg \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{j_d}$

On part des 4 équations de Maxwell : (simplifiée)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \cancel{\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}\ 0 & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\cancel{\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}}_{\text{ARQS}} \end{cases}$$

04-6

Pour obtenir une équation de propagation sur $\vec{E}$, on part de : $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E})$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$\underbrace{\vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}_{\text{MF}} = \underbrace{0}_{\text{MG}} - \Delta\vec{E}$$

Schwarz

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{B}) = -\Delta\vec{E}$$

MA

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\,\vec{j}) = -\Delta\vec{E} \quad . \text{ Or } \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

donc $\boxed{\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \Delta\vec{E}}$ (3) c'est une équation de type diffusion (et non pas de d'Alembert)

On propose une solution de la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}x + \varphi)}$$

avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$.

que l'on injecte dans (3) :

$$\mu_0\sigma j\omega = (-j\underline{k})^2 \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -j\mu_0\sigma\omega \quad (4)$$

donc $\underline{k} = \pm\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$ ) le + est la seule sol. physiquement acceptable.

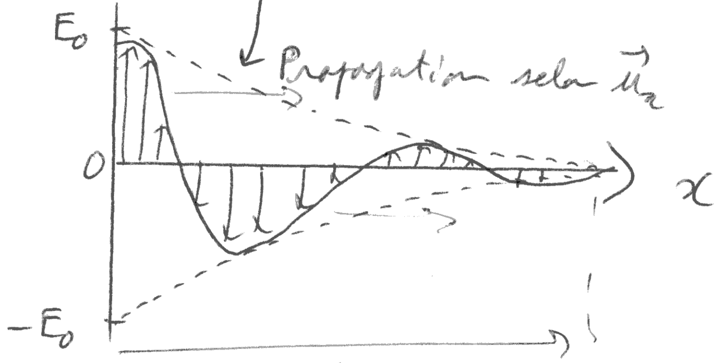
$$\underline{k} = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

04-7

donc $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \, e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} + j\frac{x}{\delta})}$

$= \vec{E}_0 \, e^{-x/\delta} \, e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0 \, e^{-x/\delta}}_{\text{amplitude décroissante}} \cos(\underbrace{\omega t - \frac{x}{\delta}}_{\text{Propagation}} + \varphi) \text{ dans } \mathbb{R}.$$



4 à 5 $\delta$

Ce phénomène s'appelle l'<u>effet de peau</u>.

a). L'onde pénètre dans le conducteur à une profondeur de 4 à 5 $\delta$ appelée : - <u>épaisseur de peau</u>

ou - profondeur de pénétration.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$ Dans le cuivre ($\sigma = 5 \cdot 10^7 \, \Omega^{-1} m^{-1}$)

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$

- Infrarouge $\lambda = 30 \, \mu m$ : $\delta = 20 \, nm$
- Micro-onde $\lambda = 0{,}3 \, m$ : $\delta = 2 \, \mu m$

très petite d'où le terme de peau.

→ L'onde pénètre très peu dans un conducteur.

<u>Si $\sigma \to \infty$</u> : conducteur <u>idéal</u> : on retrouve $\delta \to 0$

L'onde ne pénètre pas du tout dans un conducteur

OM-8

idéal : on a alors $\vec{E} = \vec{0}$ partout dans le conducteur, hypothèse faite dans le chapitre précédent.
(L'onde est alors totalement réfléchie.)

b) Et la <u>dispersion</u> ?

$$\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{1/\delta} = \omega \delta$$

$$\boxed{v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}}}$$

$v_\varphi$ dépend de $\omega$ ! Chaque fréquence avance à une vitesse de phase : il y a <u>dispersion</u>.

② <u>Remarques</u> : • Pour une pseudo OPPH de la forme $e^{j(\omega t - \underline{k} x)}$ :

$$\boxed{\frac{\partial \cdots}{\partial t} \longrightarrow \times j\omega}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \frac{\partial \cdots}{\partial x}\vec{u}_x \rightarrow (-j\underline{\vec{k}}) \\ \Delta = \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \times(-j\underline{k})^2 \end{aligned}}$$

$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\underline{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ toujours valable ici donc :

$\vec{\nabla} \wedge \vec{\underline{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $-j\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} = -j\omega \vec{\underline{B}}$

soit $\boxed{\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega}}$ dans $\mathbb{C}$. (idem OPPH)

par contre, on ne peut pas l'écrire dans $\mathbb{R}$ car $\underline{k}$ est complexe ici !

• (4) : $\underline{\underline{k}^2 = -j\mu\sigma\omega}$ relie $\underline{k}$ à $\omega$ : elle est appelée <u>la relation de dispersion</u>

04-9

# III Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

## 1) Le modèle du plasma

Un plasma est un gaz ionisé, globalement neutre et composé d'ions de masse $M_i$ et d'électrons de masse $m \ll M_i$ et de charge $(-e)$

Exemple : L'ionosphère, partie de l'atmosphère située à plus de 80 km d'altitude, est un plasma.
→ Comment l'ionosphère affecte les ondes électromagnétiques ?
↳ il faut trouver l'équation de propagation

Hypothèses du modèle :

- $\rho = \rho^+ + \rho^- = 0$

$\rho^+$ : ions + (cations) ; $\rho^-$ : électrons et ions − (anions)

$\frac{m}{M} = \frac{1}{1800} \ll 1$

- les particules sont soumises à l'onde électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$, donc à la force $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (Lorentz)

donc
$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} & \text{pour les électrons} \\ M \frac{d\vec{v}'}{dt} = \text{''} \quad \text{''}' & \text{pour les ions.} \end{cases}$$

comme $M \gg m$, les ions bougent très peu comparés aux électrons.

On suppose donc que les électrons bougent, mais que les ions bougent peu (restent fixes) car ils sont beaucoup plus lourds.

- On suppose que l'onde électromagnétique est une pseudo OPPH de la forme $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k} y)}$

avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$

## 2) Les équations de base

- Seuls les électrons de charge $(-e)$ bougent : le courant volumique est donc $\vec{j}_v = -N e \vec{v}$

nombre d'électrons mobile par volume — vitesse des électrons mobiles.

- Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ 0 \quad (\rho_{tot} = 0) & \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Remarque : - il y a un courant $\vec{j}_v$ possible (donc $\vec{j}_v \neq \vec{0}$)

- l'ARQS n'est pas justifiée, car le plasma n'est pas forcément un bon conducteur.

04-11

## 3) La densité de courant dans le plasma

Avant de combiner les équations de Maxwell pour obtenir une équation de propagation, il faut voir ce que vaut $\vec{j}_V$. <u>On a vu</u> : $\vec{j}_V = -Ne\vec{v}$

mais que vaut $\vec{v}$ ?

$\vec{v}$ est la vitesse des électrons, mis en mouvement par la présence de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Pour exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, on peut appliquer le PFD à l'électron :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}.$$

<u>Remarque</u> $\left.\begin{array}{l} \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}y)} \\ \text{et } \vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{array}\right)$ dans $\mathbb{C}$

$$\text{donc } -j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \quad (\text{pseudo OPPH})$$

$$B_0 = \|\vec{B}\| = \frac{\|k\| \times \|E\|}{\omega} = \frac{k\,E_0}{\omega} \simeq \frac{E_0}{c} \sim B_0$$

On n'a pas $\cancel{\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}}$ car on n'a pas l'équation de d'Alembert, mais on admet que $\frac{k}{\omega}$ reste de l'ordre de

04-12

grandeur de $\frac{1}{c}$

OG de : $\dfrac{q\,\|\vec{E}\|}{\|q\,\vec{v}\wedge\vec{B}\|} \sim \dfrac{qE_0}{q\cdot v\cdot B_0} \sim \dfrac{c}{v}$ ← $c$ : $3.10^8$ m/s ; $v$ : électron.

Si l'électron n'a pas une vitesse relativiste, $\frac{c}{v} \gg 1$ donc la force $q\vec{E}$ prédomine largement sur $q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$

donc : PFD

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

(*)

Dans $\mathbb{C}$ : $m\,j\omega\,\underline{\vec{v}} = q\underline{\vec{E}}$

donc $\boxed{\underline{\vec{v}} = \dfrac{q}{jm\omega}\underline{\vec{E}} = \dfrac{-e}{j\omega m}\underline{\vec{E}}}$

((*) Vrai car si $\underline{E}$ est oscillant, $\underline{v}$ sera oscillant aussi, donc en $e^{j\omega t}$ )

Or $\vec{\underline{j}}_V = -Ne\underline{\vec{v}}$ ~~donc~~ $\boxed{\vec{\underline{j}}_V = -j\dfrac{Ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}}$ ← conductivité complexe !

## 4) La relation de dispersion

On part de $\vec{rot}(\vec{rot}\,\underline{\vec{E}})$ :

04-13

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\underline{\vec{E}}) = \vec{grad}(div\,\underline{\vec{E}}) - \Delta\underline{\vec{E}}$$

$$\vec{rot}\left(-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) = \underset{(MG)}{0} - \Delta\underline{\vec{E}}$$

Schwarz

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\underline{\vec{B}}) = -\Delta\underline{\vec{E}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{\underline{j}}_v + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) = -\Delta\underline{\vec{E}}$$

$$-j\omega\left(\mu_0\left(-\frac{jNe^2}{m\omega}\right)\underline{\vec{E}} + \varepsilon_0\mu_0\, j\omega\,\underline{\vec{E}}\right) = -(j\underline{k})^2\underline{\vec{E}}$$

soit $-\dfrac{\mu_0 Ne^2}{m} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \underline{k}^2$ en simplifiant par $\underline{\vec{E}}$

soit $\underline{k}^2 = \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\mu_0 Ne^2}{m}\right)$ car $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\mu_0 Ne^2}{m}\frac{c^2}{\omega^2}\right)$$

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$ en notant $\omega_p^2 = \dfrac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m}$

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

Relation de dispersion

constante.

04-14

## 5) Interprétation de la relation de dispersion

$$\begin{cases} \text{si } \omega > \omega_p : & \underline{k}^2 = \text{réel positif} \rightarrow \underline{k} \text{ réel.} \\ \text{si } \omega < \omega_p : & \underline{k}^2 = \text{réel négatif} \rightarrow \underline{k} \text{ imaginaire pur !} \end{cases}$$

• <u>cas $\omega > \omega_p$</u> $\quad \underline{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ ($\underline{k}$ est réel)

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \, e^{i(\omega t - kz)} \quad (k \text{ réel})$$

$$\vec{E}_{réel} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

. L'onde se propage dans le sens des $z$ croissant <u>sans s'atténuer</u> (car $\underbrace{\text{Im}(\underline{k})}_{\text{Absorption}} = 0$)

. D'autre part : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$$

<u>$v_\varphi > c$ !</u> Ce n'est pas un problème, car $v_\varphi$ ne représente pas la vitesse de la matière, ni de l'énergie.

04-15

→ $v_\varphi$ n'est pas une constante égale à $c$, mais dépend de $\omega$ ! ⇒ le <u>plasma est dispersif</u>.
= chaque fréquence avance à une vitesse différente.

• <u>Cas $\omega < \omega_p$</u>

$\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k} \overset{+}{\ominus} j \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ noté $\ominus j k''$

imaginaire pur.

le $\ominus$ est la seule solution possible physiquement acceptable ($\mathrm{Im}(\underline{k}) < 0$) car sinon la solution diverge.

$$\rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \, e^{j(\omega t - (-jk''z))}$$

$$\mathbb{C} \quad = \vec{E}_0 \, \underbrace{e^{j\omega t}} \, \underbrace{e^{-k''z}}$$

tend vers 0 rapidement à $4$ ou $5\,\delta$ ($\delta = \frac{1}{k''}$)

<u>aucune</u> propagation car pas de $(\omega t - k'z)$

$$\mathbb{R} \quad \underline{\vec{E}_{reel} = \vec{E}_0 \cos \omega t \; e^{-k''z}}$$

$\cos(\cancel{\omega t - k'z})$

On dit que l'<u>onde est évanescente</u>

04-16

Une onde évanescente est une onde qui oscille dans le temps avec une décroissance exponentielle spatiale sans se propager.

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{1}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}} = \frac{c}{\omega\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}}$$

$\delta$ est la profondeur de pénétration de l'onde.

Conclusion. Le plasma joue le rôle d'un filtre passe haut. Les pulsations inférieures à $\omega_p$ ne peuvent pas traverser le plasma. Il faut donc choisir des pulsations supérieures à $\omega_p$ pour les communications entre le sol et le satellite.

04-17

# IV Vitesse de phase et vitesse de groupe.

Soit une pseudo OPPH $\vec{\underline{E}} = \vec{E_0}\, e^{j(\omega t - \underline{k} y)}$ $\mathbb{C}$

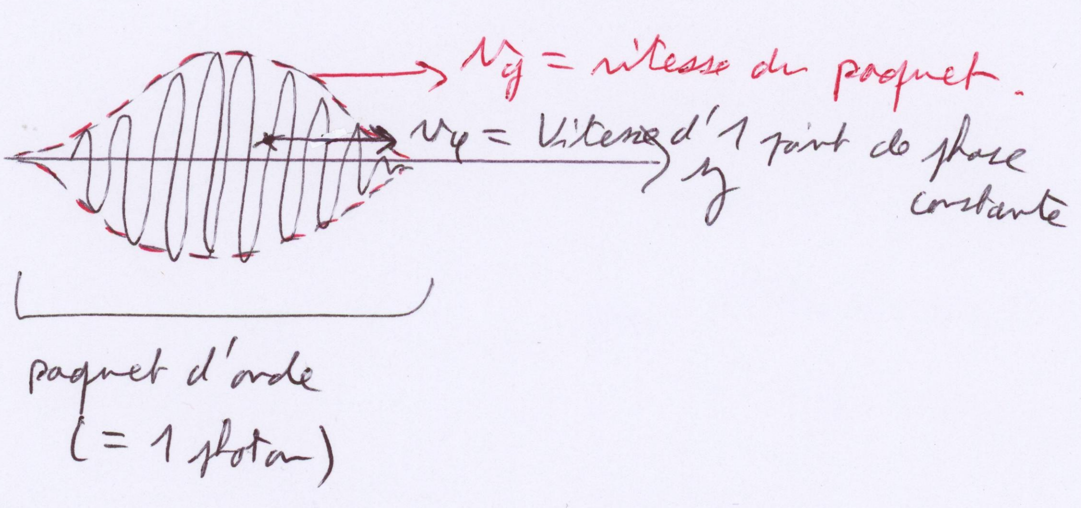
avec $\underline{k} = k' - jk''$ : $\underline{\vec{E} = \vec{E_0} \cos(\omega t - k' y)\, e^{-yk''}}$ $\mathbb{R}$

on a : $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}}$ et $\boxed{v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}}$ $(k' = Re(\underline{k}))$

Vitesse de phase

Vitesse de groupe (admis)

On admet que la vitesse de groupe représente la vitesse de déplacement de l'énergie.




On peut avoir $v_\varphi \neq v_g$ $(v_\varphi > v_g)$

↳ comme un "tapis roulant" qui roule dans le paquet, le paquet avançant plus lentement

*(Voir animation)*

04-18

## Exemples :

① → Onde électromagnétique dans le vide :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\hat{E}_0}\, e^{i(\omega t - k z)}$ injecté dans l'éq. de d'Alembert donne : $\omega^2 = k^2 c^2$

donc $\omega = kc$
$$\begin{cases} v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c \\ v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = c \end{cases}$$

Les vitesses de phase et de groupe (énergie) sont toutes deux égales à une constante : à $\underline{c = 3.10^8\, m/s}$.

② Onde dans le plasma : pour $\omega > \omega_p$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad \text{soit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

Le plus simple est de différencier cette relation de dispersion :

$$2k\, dk = \frac{1}{c^2}\, 2\omega\, d\omega \qquad \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} = cte\right)$$

donc $\dfrac{\omega}{k}\dfrac{d\omega}{dk} = c^2$ soit $\boxed{v_\varphi v_g = c^2}$

Or $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$ donc $\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} < c$

normal ! c'est la vitesse de l'énergie !