Systèmes linéaires et stabilité

Chapitre de révision (sauf stabilité)

I) Le système linéaire continu invariant (LCI)

1) Définitions

Soit un système (électrique, mécanique, ...) qui donne une sortie $s(t)$ à une entrée $e(t)$

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système LCI}} \longrightarrow s(t)$$

L - **Linéaire :** si

$$\begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{\text{donne}} s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{cases}$$

alors $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t) \longrightarrow \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R})$

C - **Continu :** Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type $f(t)$ avec t une variable continue.
On l'oppose généralement aux systèmes discrets, en particulier dans le domaine numérique.

I - **Invariant :** ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps.

si $e(t) \xrightarrow{\text{donne}} s(t)$

alors $e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)$ avec τ un temps

2) Propriétés

Soit un système sinusoïdal permanent :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

amplitude pulsation Phase

Une propriété remarquable des systèmes LCI est de donner en sortie un signal également sinusoïdal et de même pulsation ω

On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes LCI

Isomorphe : le signal a la même forme en entrée et en sortie.

→ Donc la sortie s'écrit sous la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$

? idem e(t) ! ?

⇒ Pour un signal sinusoïdal permanent en entrée, la recherche de la réponse se résume à :

→ Rechercher S_0 amplitude

→ Rechercher $(\varphi' - \varphi)$ déphasage (ou φ')

Remarque : si on excite un système avec un signal sinusoïdal de pulsation ω en entrée, et que la réponse est non sinusoïdale en sortie, ou sinusoïdale de pulsation ω' différente en sortie → alors le système est non linéaire

II) La fonction de transfert

1) La fonction de transfert (ou transmittance)

On se place ici en régime sinusoïdal permanent

- Rappel des notations complexes :

Dans $\mathbb{R}$ — Dans $\mathbb{C}$

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{e} = \underbrace{E_0 e^{j\varphi}} e^{j\omega t} = \underline{E}\, e^{j\omega t}$$

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi') \longrightarrow \underline{s} = \underbrace{S_0\, e^{j\varphi'}} e^{j\omega t} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$$

On a $e(t) = \mathrm{Re}(\underline{e})$ $\qquad \underline{E} = E_0 e^{j\varphi}$

$s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s})$ $\qquad \underline{S} = S_0\, e^{j\varphi'}$

- Définition de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0\, e^{j\varphi'} \cancel{e^{j\omega t}}}{E_0\, e^{j\varphi} \cancel{e^{j\omega t}}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0}\, e^{j(\varphi' - \varphi)}$$

Pour obtenir le signal de sortie réponse de $e(t)$ sinusoïdal permanent, il suffit de connaître $\underline{H}(j\omega)$:

$$\begin{cases} \rightarrow |\underline{H}| = \dfrac{S_0}{E_0} & \text{rapport des amplitudes appelé gain } G \\ \rightarrow \mathrm{Arg}(\underline{H}) = \varphi' - \varphi & \text{avance de phase du signal de sortie sur le signal d'entrée appelé déphasage} \end{cases}$$

Le signal de sortie est alors : (dans $\mathbb{R}$)

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$

$$= E_0\, |\underline{H}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \arg(\underline{H}(j\omega)))$$

2) Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

En élec, on peut associer des résistances R, bobines L, condensateurs C. Les courants i et tensions u sont alors reliées entre elles par des relations différentielles linéaires :

$$u = Ri \quad ; \quad u = L\frac{di}{dt} \quad ; \quad i = C\frac{du}{dt} \quad , \ldots$$

En les associant, on peut trouver une équation différentielle reliant $e(t)$ et $s(t)$ à l'aide de la loi des noeuds et la loi des mailles :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \qquad (1)$$

L'ordre du filtre est n ($n \geqslant m$ admis)

Remarque : Un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est LCI.

(+) Pour un système sinusoïdal permanent :

Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$: $\underline{e} = E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ $\quad \frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega \times \underline{e}$

dans $\boxed{\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega}$ dans $\mathbb{C}$

D'où :

- Pour une bobine : $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} \rightarrow \underline{u} = Lj\omega\, \underline{i}$

  $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = jL\omega$

- Pour un condensateur : $\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} \rightarrow \underline{i} = Cj\omega\, \underline{u}$

  $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'eq (1) peut donc s'écrire dans $\mathbb{C}$

$$b_0 \underline{s}(t) + b_1 \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\underline{s}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m\underline{s}(t)}{dt^m} = a_0 \underline{e}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m\underline{e}(t)}{dt^m} \qquad (2)$$

avec les b_i et les a_i réels (car $Re((2)) = (1)$)

soit $b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{e}$

soit, en factorisant par $\underline{s}$, et par $\underline{e}$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}$$

soit $$\boxed{\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}}$$

<u>A l'ordre 2</u> (au programme) :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}}$$

$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}\right\}$ sont réels

3) Notation de Laplace et transposition entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Notation de Laplace $\quad p \xrightarrow{\mathbb{R}} \left[\frac{d}{dt}\right]$, $\quad p \xrightarrow{\mathbb{C}} \times j\omega$

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{s}{e}$$

(a_i et b_i réels)

soit $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2]\, s = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2]\, e$

et donc $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$

III) Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

1) A partir de l'équation différentielle

(Partie rédigée en classe)