Diffusion de particules

L. Menguy, PSI*, Lycée Montesquieu, Le Mans

Octobre 2017

Plan du cours

Les phénomènes de diffusion

Définition

Le phénomène de diffusion est un transport de matière (donc de particules) qui tend à uniformiser la distribution, donc s'effectuant dans le sens des concentrations décroissantes.

Conséquences

La diffusion est un phénomène irréversible

! Les phénomènes de transport sont multiples !

Il faut bien distinguer les phénomènes de diffusion des phénomènes de convection et de micro-convection !

Les phénomènes de diffusion

Définition

Le phénomène de diffusion est un transport de matière (donc de particules) qui tend à uniformiser la distribution, donc s'effectuant dans le sens des concentrations décroissantes.

Conséquences

La diffusion est un phénomène irréversible

! Les phénomènes de transport sont multiples !

Il faut bien distinguer les phénomènes de diffusion des phénomènes de convection et de micro-convection !

Les phénomènes de diffusion

Définition

Le phénomène de diffusion est un transport de matière (donc de particules) qui tend à uniformiser la distribution, donc s'effectuant dans le sens des concentrations décroissantes.

Conséquences

La diffusion est un phénomène irréversible

! Les phénomènes de transport sont multiples !

Il faut bien distinguer les phénomènes de diffusion des phénomènes de convection et de micro-convection !

Les phénomènes de diffusion

Définition

Le phénomène de diffusion est un transport de matière (donc de particules) qui tend à uniformiser la distribution, donc s'effectuant dans le sens des concentrations décroissantes.

Conséquences

La diffusion est un phénomène irréversible

! Les phénomènes de transport sont multiples !

Il faut bien distinguer les phénomènes de diffusion des phénomènes de convection et de micro-convection !

Plan du cours

Plan du cours

Quelques définitions

Définitions

- La concentration particulaire $n(x, y, z, t)$
- La densité de courant de particules $\overrightarrow{j}(x, y, z, t)$
- Le flux de particules Φ à travers S

Quelques définitions

Définitions

- La concentration particulaire $n(x, y, z, t)$
- La densité de courant de particules $\overrightarrow{j}(x, y, z, t)$
- Le flux de particules Φ à travers S

Quelques définitions

Définitions

- La concentration particulaire $n(x, y, z, t)$
- La densité de courant de particules $\overrightarrow{j}(x, y, z, t)$
- Le flux de particules Φ à travers S

Plan du cours

Bilan de particules unidimensionnel

Variation du nombre de particules dans dV	=	Nb de particules entrantes	−	Nb de particules sortantes
$\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,dV$	=	$j(x,t)\,S$	−	$j(x+dx,t)\,S$

Equation de conservation locale de particules (1D)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Bilan de particules unidimensionnel

Variation du nombre de particules dans dV	=	Nb de particules entrantes	−	Nb de particules sortantes
$\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t}\, dV$	=	$j(x,t)\; S$	−	$j(x+dx,t)\; S$

Equation de conservation locale de particules (1D)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Bilan de particules unidimensionnel

Variation du nombre de particules dans dV	=	Nb de particules entrantes	−	Nb de particules sortantes
$\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t}\, dV$	=	$j(x,t)\, S$	−	$j(x+dx,t)\, S$

Equation de conservation locale de particules (1D)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Bilan de particules tridimensionnel

- On applique le principe de conservation du nombre de particules sur un volume V entouré d'une surface fermée S
- On applique le théorème de Green-Ostrogradski

Equation de conservation locale de particules (3D)

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Sans perte ni création de matière

Bilan de particules tridimensionnel

- On applique le principe de conservation du nombre de particules sur un volume V entouré d'une surface fermée S
- On applique le théorème de Green-Ostrogradski

Equation de conservation locale de particules (3D)

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Sans perte ni création de matière

Bilan de particules tridimensionnel

- On applique le principe de conservation du nombre de particules sur un volume V entouré d'une surface fermée S
- On applique le théorème de Green-Ostrogradski

Equation de conservation locale de particules (3D)

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Sans perte ni création de matière

Plan du cours

Loi de Fick

Loi de Fick

- A une dimension : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- A trois dimensions : $\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$

D est le coefficient de diffusion (en $m^2.s^{-1}$)

Loi de Fick

Loi de Fick

- A une dimension : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- A trois dimensions : $\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$

D est le coefficient de diffusion (en $m^2.s^{-1}$)

Loi de Fick

Loi de Fick

- A une dimension : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- A trois dimensions : $\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}(n)$

D est le coefficient de diffusion (en $m^2.s^{-1}$)

Plan du cours

Exemples de coefficients de diffusion

- Coefficients de diffusion (ou autodiffusion) de gaz sous une atmosphère :

	T (K)	D ($m^2.s^{-1}$)
H_2 dans H_2	273	$12,85.10^{-5}$
H_2 dans l'air	273	$6,11.10^{-5}$
H_2O dans l'air	273	$2,19.10^{-5}$
O_2 dans l'air	273	$1,78.10^{-5}$

Exemples de coefficients de diffusion

- Coefficients de diffusion dans les liquides :

	T (K)	D ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)
NaCl dans l'eau	298	$1,9.10^{-9}$
le sucre dans l'eau	298	$0,52.10^{-9}$

- Coefficients de diffusion solide-solide :
  Al dans Cu (à $298\,\mathrm{K}$) : $1,30.10^{-30}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$

Exemples de coefficients de diffusion

- Coefficients de diffusion dans les liquides :

	T (K)	D ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
NaCl dans l'eau	298	$1,9.10^{-9}$
le sucre dans l'eau	298	$0,52.10^{-9}$

- Coefficients de diffusion solide-solide :
  Al dans Cu (à $298\,\mathrm{K}$) : $1,30.10^{-30}\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$

Plan du cours

Plan du cours

L'équation de diffusion unidimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$
  - La loi de Fick : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 1D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

- Commentaires

L'équation de diffusion unidimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$
  - La loi de Fick : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 1D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

- Commentaires

L'équation de diffusion unidimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}$
  - La loi de Fick : $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 1D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

- Commentaires

Plan du cours

L'équation de diffusion tridimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\operatorname{div} \overrightarrow{j} + \dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$
  - La loi de Fick : $\overrightarrow{j} = -D \, \overrightarrow{\text{grad}}(n)$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 3D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

- Commentaires

L'équation de diffusion tridimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$
  - La loi de Fick : $\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 3D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$$

- Commentaires

L'équation de diffusion tridimensionnelle

- En combinant :
  - La conservation de particules : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$
  - La loi de Fick : $\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$
- On aboutit à :

Equation de diffusion 3D

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$$

- Commentaires

Plan du cours

Plan du cours

Ordres de grandeurs

- Basé sur une analyse dimensionnelle
- Aboutit à :

$$\tau \approx \frac{l^2}{D}$$

- Exemple : grenadine dans l'eau sur $l \approx 10\,\mathrm{cm}$

$$\tau \approx \frac{0,1^2}{10^{-9}} \approx 10^7\,\mathrm{s} \approx 100\,\mathrm{jours} \quad !$$

Ordres de grandeurs

- Basé sur une analyse dimensionnelle
- Aboutit à :

$$\tau \approx \frac{l^2}{D}$$

- Exemple : grenadine dans l'eau sur $l \approx 10\,\mathrm{cm}$

$$\tau \approx \frac{0,1^2}{10^{-9}} \approx 10^7\,\mathrm{s} \approx 100\,\mathrm{jours} \quad !$$

Ordres de grandeurs

- Basé sur une analyse dimensionnelle
- Aboutit à :

$$\tau \approx \frac{l^2}{D}$$

- Exemple : grenadine dans l'eau sur $l \approx 10\,\mathrm{cm}$

$$\tau \approx \frac{0,1^2}{10^{-9}} \approx 10^7\,\mathrm{s} \approx 100\,\mathrm{jours} \quad !$$

Plan du cours

Le régime stationnaire

- Régime stationnaire = pas d'évolution temporelle : $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$
- A une dimension, la concentration varie linéairement
- Exemples

Le régime stationnaire

- Régime stationnaire = pas d'évolution temporelle : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$
- A une dimension, la concentration varie linéairement
- Exemples

Le régime stationnaire

- Régime stationnaire = pas d'évolution temporelle : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$
- A une dimension, la concentration varie linéairement
- Exemples

Plan du cours

Exemple : le tube de section S (unidimensionnel)

- A $t = 0$, on place N_0 particules en $x = 0$ (problème 1D)
- Solution : $n(x,t) = \dfrac{N_0}{S(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(\dfrac{-x^2}{4Dt}\right)$
- La solution doit vérifier :
  - L'équation de diffusion
  - Les conditions aux limites
  - Les conditions initiales
  - La conservation totale des particules (condition redondante) : $N_0 = N_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t)\ S\ dx$

Exemple : le tube de section S (unidimensionnel)

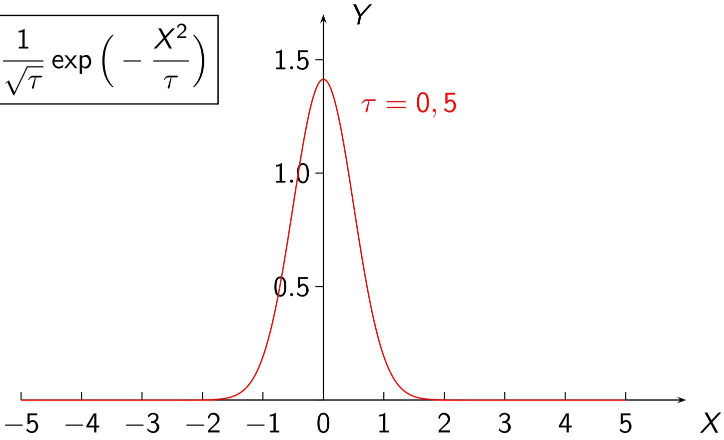
- A $t = 0$, on place N_0 particules en $x = 0$ (problème 1D)
- Solution : $n(x,t) = \dfrac{N_0}{S(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(\dfrac{-x^2}{4Dt}\right)$
- La solution doit vérifier :
  - L'équation de diffusion
  - Les conditions aux limites
  - Les conditions initiales
  - La conservation totale des particules (condition redondante) : $N_0 = N_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t)\, S\, dx$

Exemple : le tube de section S (unidimensionnel)

- A $t = 0$, on place N_0 particules en $x = 0$ (problème 1D)
- Solution : $n(x,t) = \dfrac{N_0}{S(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(\dfrac{-x^2}{4Dt}\right)$
- La solution doit vérifier :
  - L'équation de diffusion
  - Les conditions aux limites
  - Les conditions initiales
  - La conservation totale des particules (condition redondante) : $N_0 = N_{totale} = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t)\; S\; dx$

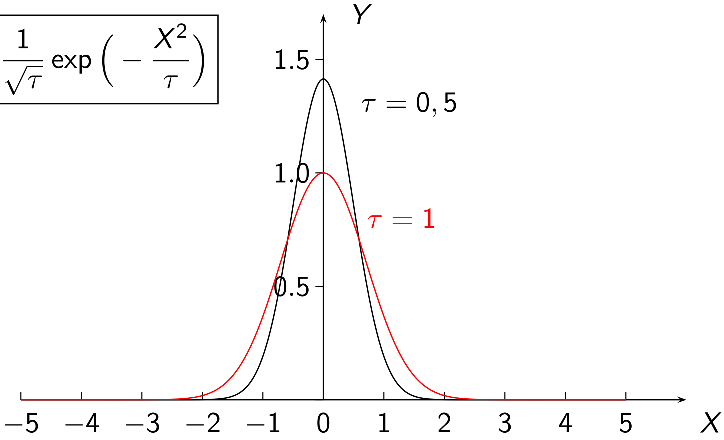
Tracé de la solution

$$\boxed{Y(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{X^2}{\tau}\right)}$$



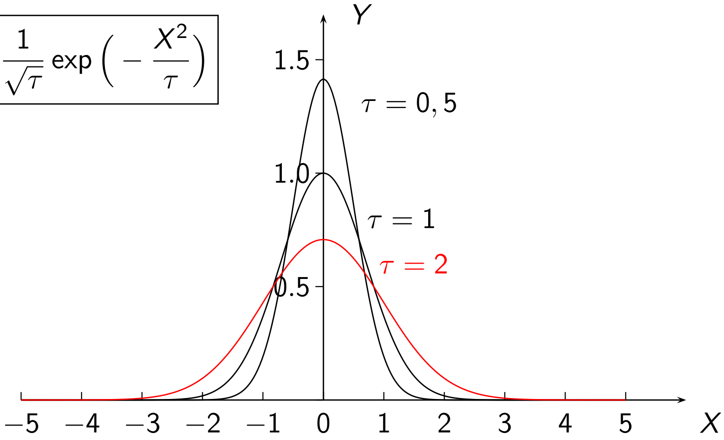
Tracé de la solution

$$\boxed{Y(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{X^2}{\tau}\right)}$$



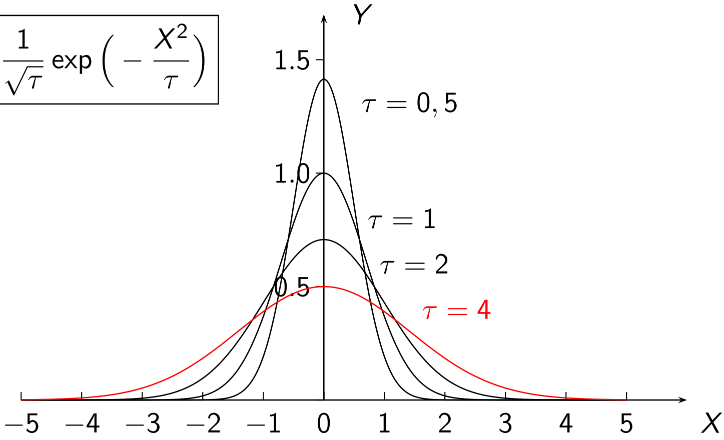
Tracé de la solution

$$\boxed{Y(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{X^2}{\tau}\right)}$$



Tracé de la solution

$$\boxed{Y(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{X^2}{\tau}\right)}$$



Tracé de la solution

$$\boxed{Y(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{X^2}{\tau}\right)}$$