Puissance en régime sinusoïdal forcé

I) Quelques rappels

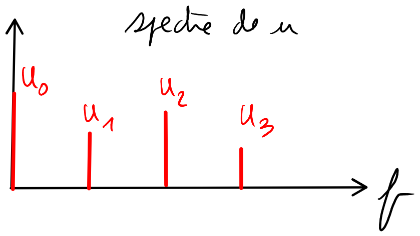
⊗ Courant continu : $U = cte$ $I = cte$

$P = UI$ constante dans le temps

⊕ Courant alternatif : Variable dans le temps, périodique de période T

$$u(t) = \underset{\text{moyen}}{U_0} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$



→ Valeur instantanée (à t) : $u(t)$

→ Valeur moyenne : $\underset{(\text{moyen})}{U_0} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\,dt$

→ Valeur efficace : $U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t)\rangle_t}$

• **Exemple** : considérons le signal sinusoïdal :

$$u(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

→ U(t) moyen ? : $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} U_1 \int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\, dt$

$$= \frac{1}{T} U_1 \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)\, dt \right]_0^T$$

$$= \frac{U_1}{\omega T} \left(\sin(\underbrace{\omega t}_{2\pi} + \varphi) - \sin\varphi \right)$$

$$\langle u(t) \rangle = 0$$

→ U efficace ? : $u^2(t) = U_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{U_1^2}{2}\left(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\right)$

$$\langle u^2(t) \rangle = \frac{U_1^2}{2} \left(\langle 1 \rangle + \underbrace{\langle \cos(2\omega t + 2\varphi) \rangle}_{0} \right)$$

$$= \frac{U_1^2}{2}$$

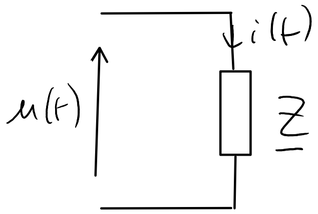
$U_{eff} = \sqrt{\frac{U_1^2}{2}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}$ pour un signal sinusoïdal

⚠ ce résultat n'est pas valable pour un signal carré, triangulaire...

On verra en TD que pour $u(t) = \sum_i U_i \cos(i\omega t + \varphi_i)$

on a $U_{eff} = \sqrt{\frac{\sum_i U_i^2}{2}} = \sqrt{\sum U_{i\,eff}}$

II) Puissance moyenne et facteur de puissance en régime sinusoïdal



$$\begin{cases} u(t) = U_M \cos(\omega t) \\ i(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$ ← pris comme référence des phases

<u>Dans $\mathbb{C}$</u> : $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ soit $U_m e^{j\omega t} = (Z_0 e^{j\varphi}) I_m e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$

$$\boxed{\operatorname{Arg}(\underline{Z}) = \varphi}$$

Puissance instantanée reçue par $\underline{Z}$: $p(t) = u(t)\, i(t)$

$$= U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

Puissance moyenne reçue par le dipôle $\underline{Z}$:

$$\langle p(t) \rangle = \langle U_m I_m \cos(\omega t) . \cos(\omega t - \varphi) \rangle$$

$$= U_m I_m \langle \cos(\omega t) . \cos(\omega t - \varphi) \rangle \quad \big] \text{ linéarisation}$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} \langle \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi \rangle$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} \Big(\underbrace{\langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \cos\varphi \rangle}_{\cos\varphi} \Big)$$

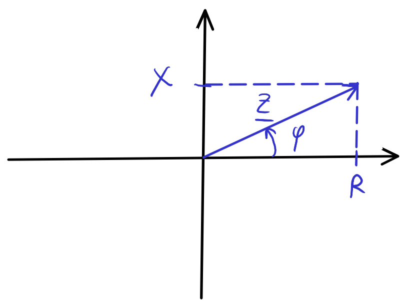
donc $\langle p(t) \rangle = \dfrac{U_m I_m}{2} \cos\varphi$ or $U_{eff} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $I_{eff} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

donc $\boxed{P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi}$

$\cos\varphi$ s'appelle le facteur de puissance

- <u>Représentations graphiques</u> :

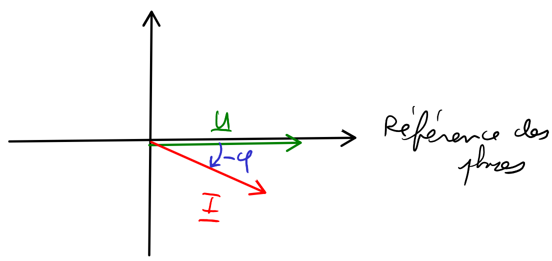
de $\underline{Z}$ dans le <u>plan complexe</u>



$\underline{Z} = R + jX$

$$\begin{cases} R = |\underline{Z}| \cos\varphi \\ X = |\underline{Z}| \sin\varphi \end{cases}$$

<u>Représentation de Fresnel</u> de $\underline{U}$ et $\underline{I}$



* Autres écritures de P_{moy}

(1) $P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$

or $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ $\rightarrow$ $U_{eff} = |\underline{Z}|\, I_{eff}$

$\rightarrow$ $R = Re(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \cos\varphi$

donc $P_{moy} = \underbrace{|\underline{Z}| I_{eff}}_{U_{eff}} . I_{eff} \cos\varphi = |\underline{Z}| \cos\varphi . I_{eff}^2$

$$\boxed{P_{moy} = R\, I_{eff}^2}$$ avec $R = Re(\underline{Z})$

$\underline{Z}$ dans laquelle circule i

(2) $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| e^{-j\varphi}$

donc $Re(\underline{Y}) = |\underline{Y}| \cos(-\varphi) = |\underline{Y}| \cos\varphi$

$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi = U_{eff} \frac{U_{eff}}{|\underline{Z}|} \cos\varphi$

$= U_{eff}^2 \underbrace{|\underline{Y}| \cos\varphi}_{Re(\underline{Y})}$

donc $$\boxed{P_{moy} = Re(\underline{Y})\, U_{eff}^2}$$

⚠ $Re(\underline{Y}) \neq \frac{1}{Re(\underline{Z})}$!

III Applications

1) Cas du dipôle purement réactif

Dipôle réactif $\underline{Z}$: $Re(\underline{Z}) = 0$

Exemple Inductance : $\underline{Z}_L = jL\omega$

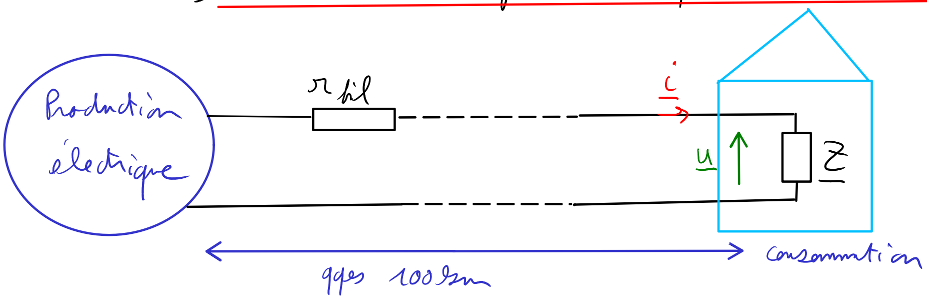
Condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

sont des dipôles réactifs

$$P_{moy} = Re(\underline{Z})\, I_{eff}^2 = 0$$

Un dipôle purement réactif ne consomme pas de puissance en moyenne !

2) Utilité d'un facteur de puissance élevé



$U_{eff} = 230\,V$ imposé

L'appareil consommateur $\underline{Z}$ a besoin d'une puissance P_0 fixée :

$$P_0 = U_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

imposés

Pour une même puissance P_0 consommée, à U_{eff} fixé, un $(\cos\varphi)$ plus faible nécessite I_{eff} plus important.

Or les pertes lors du transport (fil de résistance r_{fil}), les pertes Joule dans le fil sont $P_{\substack{pertes\\fil}} = r_{fil}\, I_{eff}^2$

Un $(\cos\varphi)$ plus faible va donc appeler plus de courant I_{eff} et donc augmenter les pertes Joules du transport.

<u>Exemple</u> : Appel de puissance $P_0 = 2300\,W$, fil de transport $r = 1\,\Omega$

- si $\cos\varphi = 1 \rightarrow I_{eff} = \dfrac{P_0}{U_{eff}\cos\varphi} = 10\,A$ $\quad P_{pertes} = 1 \times 10^2 = 100\,W$
- si $\cos\varphi' = 0{,}7 \rightarrow I'_{eff} = \dfrac{P_0}{U_{eff}\cos\varphi'} = \dfrac{10}{0{,}7} = 13\,A$ $\quad P_{pertes} = 1 \times 13^2 = 200\,W$

Un $\cos\varphi$ de 0,7 au lieu de 1 induit un doublement des pertes Joule lors du transport !

La législation impose $\cos\varphi > 0{,}93$

<u>Remarque</u> : on utilisera également des lignes Hautes Tension pour le transport, de sorte à diminuer I_{eff} dans les lignes.

3) Relèvement d'un facteur de puissance

Soit une machine consommatrice d'impédance $\underline{Z} = R + jX$

→ soit inductive $\underline{Z} = R + j(L\omega)$ $X > 0$

→ soit capacitive $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$ $X < 0$

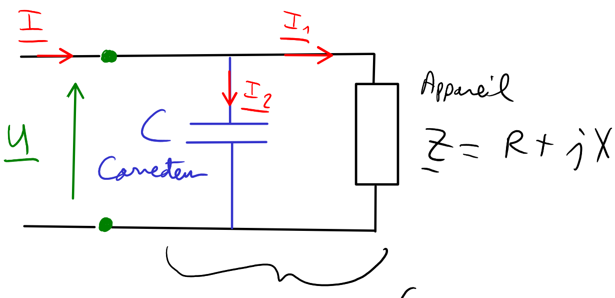
Cet appareil peut ne pas avoir un $(\cos\varphi)$ assez grand.

Par exemple, un moteur électrique (machine à laver, ...) contient un bobinage et est donc inductive : $\underline{Z} = R + jL\omega$

Il est alors nécessaire de corriger son facteur de puissance en ajoutant un condensateur de capacité C

A l'inverse, une machine capacitive nécessitera l'ajout d'une inductance pour être corrigée.

Calculons la capacité C du condensateur à ajouter pour corriger une charge inductive : $\underline{Z} = R + jX$ avec $X > 0$ (charge inductive)



$\underline{Z}_{eq}$ corrigé

ⓐ Par le calcul : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z} \,//\, \frac{1}{jC\omega}$

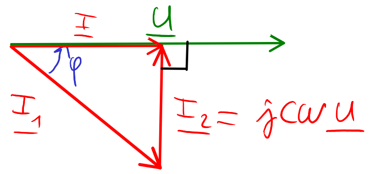
$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R+jX} + jC\omega = \frac{R-jX}{R^2+X^2} + jC\omega$$

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{R}{R^2+X^2} + j\left(C\omega - \frac{X}{R^2+X^2}\right)$$

$$\cos\varphi = 1 \iff \underline{Y}_{eq} \text{ réel} \iff \mathrm{Im}(\underline{Y}_{eq}) = 0 \iff C\omega = \frac{X}{R^2+X^2}$$

soit $\boxed{C\omega = \frac{X}{|\underline{Z}|^2}}$ le réseau élec fournit du 50 Hz donc $\omega = 2\pi \times 50 \Rightarrow C$

(b) Par la représentation de Fresnel



$\left(\mathrm{Arg}(jC\omega) = +\frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{U}$ et $\underline{I}_1$ ne sont pas en phase : le déphasage de $\underline{U}$ par rapport à $\underline{I}_1$ est $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{Z})$.

L'ajout d'un condensateur en parallèle ajoute un courant $\underline{I}_2$:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad \text{(loi des noeuds)}$$

L'objectif est de rendre $\underline{I}$ en phase avec $\underline{U}$

D'après le diagramme de Fresnel ci-dessus :

$$\sin\varphi = \frac{|\underline{I}_2|}{|\underline{I}_1|} = \frac{C\omega\,|\underline{U}|}{\frac{1}{|\underline{Z}|}\,|\underline{U}|} = |\underline{Z}|\,C\omega$$

Or $\underline{Z} = R + jX$ donc $\sin\varphi = \frac{X}{|\underline{Z}|} \longrightarrow \boxed{C\omega = \frac{X}{|\underline{Z}|^2}}$