Signaux périodiques et filtrage d'un système linéaire

Chapitre de révisions

I) Le signal périodique non sinusoïdal

1) La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

J. Fournier a déterminé que tout signal périodique de période T_0 peut se décomposer en une somme infinie de sinus et de cosinus appelée série de Fourier :

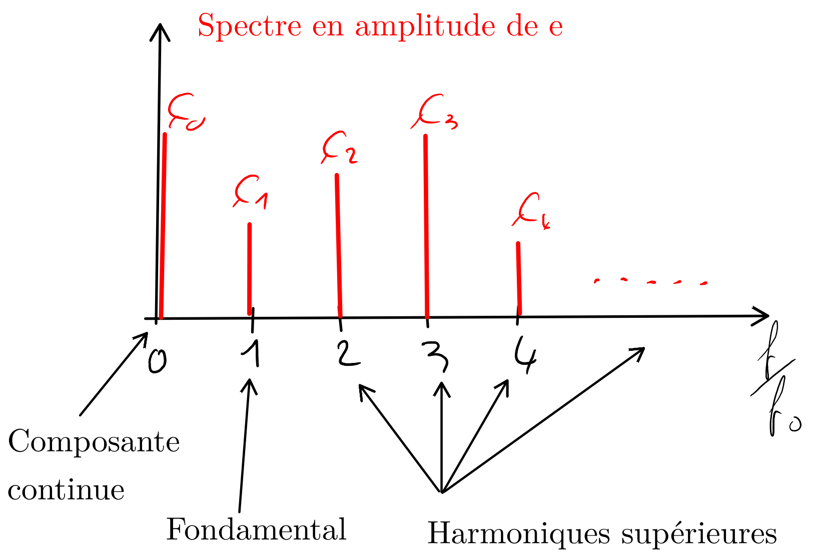
$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

ou

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

- C_0 est la composante continue ($=$ valeur moyenne du signal)
- ω_0 est la pulsation la plus basse : c'est le fondamental
- $\omega_n = n\omega_0$ est l'harmonique de rang n

Le spectre est la représentation graphique des coefficients C_n (en amplitude) et φ_n (en phase)



Fréquence du fondamental : $f_0 = \frac{1}{T}$

Fréquence de l'harmonique de rang n :

$$f_n = n f_0 \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Exemple :

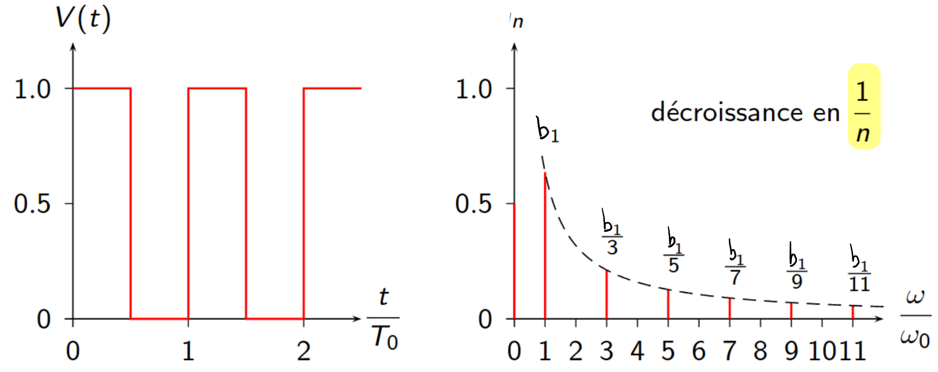
Note en musique $\longrightarrow$ la hauteur (do, ré, ...) est donnée par le fondamental

$\longrightarrow$ le timbre diffère selon la composition des harmoniques supérieures, ce qui permet de distinguer 2 instruments différents jouant la même note

$\longrightarrow$ Voir les exemples des signaux créneaux et triangulaires sur le diaporama

Signal créneau

Domaine temporel | Domaine fréquentiel

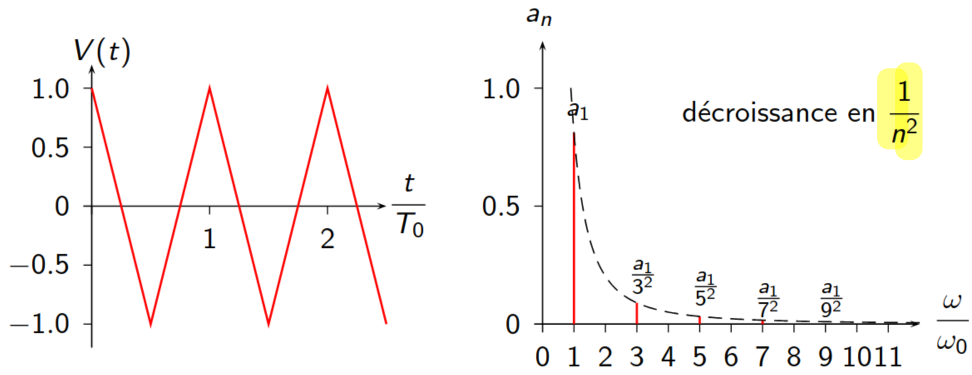


Tracés pour $E_0 = 1\,\mathrm{V}$.

$$V(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1)\omega_0 t\right)\right)$$

Signal triangulaire

Domaine temporel | Domaine fréquentiel



Tracés pour $E_0 = 1\,\mathrm{V}$.

$$V(t) = \frac{8E_0}{\pi^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left((2n+1)\omega_0 t\right)\right)$$

2) Interprétation du spectre

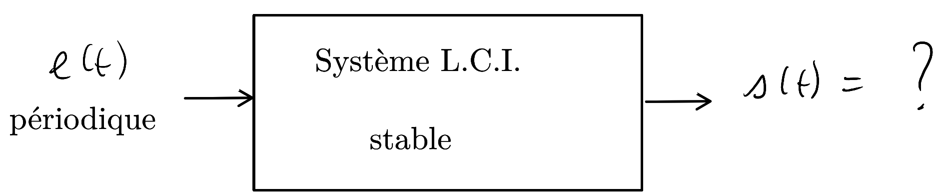
- C_0 est la valeur moyenne du signal
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (ω_0 du fondamental) donne la période du signal
- Plus le signal a des variations rapides / brutales (comme les discontinuités du créneau), plus le spectre est riche en harmoniques supérieures
- Si le signal temporel est pair ($f(t) = f(-t)$) alors la série de Fourier ne contient que des termes en cosinus (pairs)
- Si le signal temporel est impair (composante continue déduite) alors la série de Fourier ne contient que des sinus (impairs)

Remarque : le réseau d'alimentation électrique de 50 Hz doit être sinusoïdal avec le moins d'harmoniques supérieures possibles pour éviter d'endommager les appareils.

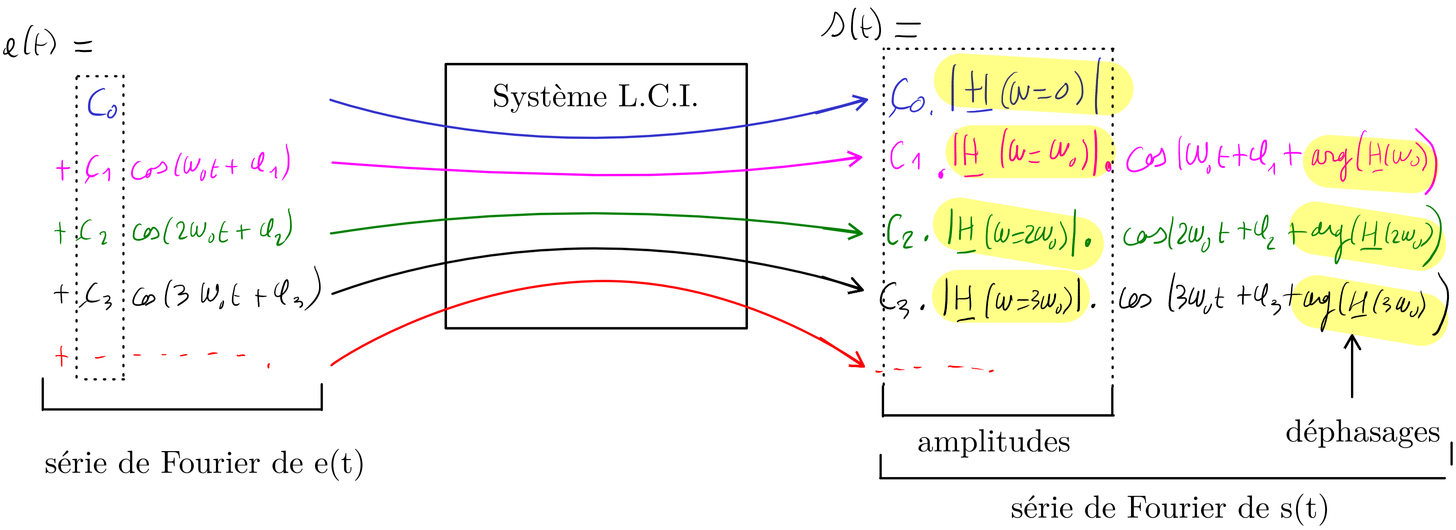
On mesure alors le taux de distorsion harmonique :

$$THD = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots}}{C_1}$$ qui doit être le plus petit possible

II) Détermination du signal et notion de filtrage

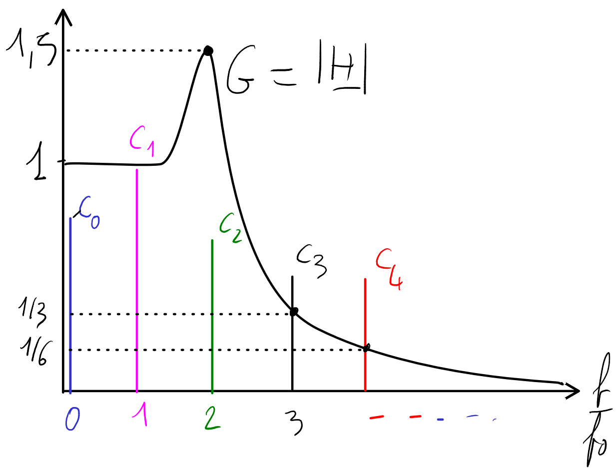


Le système étant linéaire, il suffit de décomposer $e(t)$ en série de Fourier, puis de prendre séparément chaque terme de la série (chaque sinus) et calculer la sortie correspondante à chaque sinus. La réponse globale $s(t)$ à l'entrée $e(t)$ est alors la somme de toutes les réponses individuelles (grâce à la propriété linéaire du filtre)

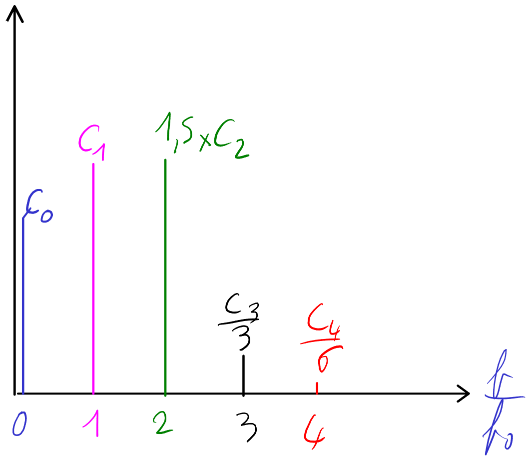


Le spectre du signal de sortie peut donc se trouver directement graphiquement à partir du spectre du signal d'entrée et du tracé de la fonction de transfert en fonction de ω (ou de f)

Exemple :



Spectre de e(t)



Spectre de s(t)

Remarque : Pour un système linéaire, les raies du spectre du signal d'entrée se retrouvent en sortie.

Elles peuvent être coupées si $|\underline{H}(\omega)| = 0$, ou atténuées, ou amplifiées.

L'apparation éventuelle de nouvelles fréquences en sortie s(t) signifierait que le système est non linéaire !

Exemple : Traiter le cas d'un signal e(t) créneau, placé en entrée d'un intégrateur,

et trouver le signal de sortie par 2 méthodes : temporelle et fréquentielle

III) Étude de filtres

1) Caractéristiques d'un filtre

On a vu qu'un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert (ou transmisttance).

- **Ordre 1** $\quad H(p) = \dfrac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p}$ avec $b_0 \neq 0$ et $b_1 \neq 0$

à basse fréquence (BF) : $\quad H \longrightarrow \dfrac{a_0}{b_0}$

à haute fréquence (HF) : $\quad H \longrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}$

Passe haut $\longrightarrow$ coupe les BF

soit $a_0 = 0$

$$\frac{\cancel{a_0} + a_1 p}{b_0 + b_1 p}$$

Passe bas $\longrightarrow$ coupe les HF

soit $a_1 = 0$

$$\frac{a_0 + \cancel{a_1} p}{b_0 + b_1 p}$$

- **Ordre 2** $\quad H(p) = \dfrac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$ $\quad$ avec $b_0 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$

à basse fréquence $\quad H \longrightarrow \dfrac{a_0}{b_0} \quad \longrightarrow$ BF coupées $\Leftrightarrow a_0 = 0$

à haute fréquence $\quad H \longrightarrow \dfrac{a_2}{b_2} \quad \longrightarrow$ HF coupées $\Leftrightarrow a_2 = 0$

Passe bas

HF coupées, pas les BF

$a_2 = 0$ et $a_0 \neq 0$

$$\frac{a_0 + a_1 p + \cancel{a_2} p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

Passe bande

BF coupées, pas les HF

$a_0 = 0$ et $a_2 = 0$

$$\frac{\cancel{a_0} + a_1 p + \cancel{a_2} p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

Passe haut

BF coupées, pas les HF

$a_0 = 0$ et $a_2 \neq 0$

$$\frac{\cancel{a_0} + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

2) Représentation de la fonction de transfert

Nous avons vu que le sinus est une fonction isomorphe des systèmes linéaires : seule l'amplitude et la phase sont modifiées.

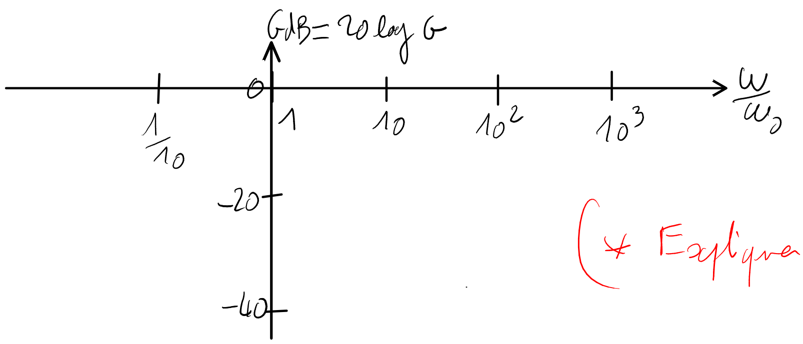
Les diagrammes de Bode sont une représentation graphique de ces modifications :

$\underline{H} \rightarrow G = |\underline{H}|$ $\quad$ diagramme de Bode en amplitude (Gain)

$\underline{H} \rightarrow \mathrm{Arg}(\underline{H})$ $\quad$ diagramme de Bode en phase

Les fonctions de transfert s'écrivent sous forme de fractions rationnelles (quotient de polynômes) : une représentation graphique avec des échelles logarithmiques est plus approprié. En effet, le tracé du diagramme de Bode fera alors apparaître des segments de droite car x^n est une droite en échelle log.

Le gain en décibel est alors défini comme étant $G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |\underline{H}|$



(* Expliquer les différentes échelles !)

Méthode de tracé d'un diagramme de Bode :

1. On commence par déterminer les asymtotes BF et HF, puis on les trace
2. On recherche ensuite les points particuliers

Remarque : il est beaucoup plus simple de rechercher les asymptotes à partir de $\underline{H}$ complexe

⚠ et non pas sur $|\underline{H}|$ ou $\mathrm{Arg}(\underline{H})$

Exemple : Tracer le diagramme de Bode du filtre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{2\sigma p/\omega_0}{1 + 2\sigma \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$