

# Systemes linéaires et stabilité

Chapitre de révisions (sauf la partie stabilité)

## I) Le système linéaire continu invariant (LCI)

### 1) Définitions

Soit un système (électrique, mécanique, ...) qui donne une sortie  $s(t)$  à une entrée  $e(t)$



L - Linéaire : si  $\begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{\text{donne}} s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{cases}$

alors  $d e_1(t) + \mu e_2(t) \longrightarrow d s_1(t) + \mu s_2(t)$  ( $d \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ )

C - Continu : Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type  $f(t)$  avec  $t$  une variable continue

On l'oppose généralement aux systèmes discrets, en particulier dans le domaine numérique

I - Invariant : Ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps

Si  $e(t) \xrightarrow{\text{donne}} s(t)$   
alors  $e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)$  avec  $\tau$  un temps

## 2) Propriétés

Soit un signal sinusoïdal permanent en entrée :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude      pulsation      phase

Une propriété remarquable des systèmes L.C.I. est de donner en sortie un signal également sinusoïdal et de même pulsation  $\omega$

On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes L.C.I.

Isomorphe : le signal a la même forme en entrée et en sortie

Donc la sortie s'écrit sous la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$

?      idem  $e(t)$       ?

⇒ Pour un signal sinusoïdal permanent en entrée, la recherche de la réponse se résume donc à :

- Rechercher  $S_0$  l'amplitude
- Rechercher  $(\varphi' - \varphi)$  le déphasage (ou  $\varphi'$ )

Remarque : Si on excite un système avec un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  en entrée et que la réponse en sortie est non sinusoïdale ou sinusoïdale de pulsation  $\omega'$  différente : alors le système est non linéaire



## 2) Systèmes régis par une équation différentielle linéaire

### à coefficients constants

En électricité, on peut associer des résistances R, des bobines L, des condensateurs C.

Les courants i et tensions u sont alors reliées entre elles par des relations différentielles

linéaires :

$$u = R i \quad ; \quad u = L \frac{di}{dt} \quad ; \quad i = C \frac{du}{dt} \quad , \dots$$

En les associant, on peut trouver une équation différentielle reliant e(t) à s(t)

à l'aide de la loi des noeuds et de la loi des mailles :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} = a_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (1)$$

L'ordre du filtre est n (  $n \geq m$  admis )

Remarque :  $\left[ \begin{array}{l} \text{Un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants} \\ \text{est L.C.I.} \end{array} \right.$

- Pour un signal sinusoïdal permanent :

Plaçons nous dans  $\mathcal{C}$  :

$$\underline{e} = E_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t} \quad \frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega \times \underline{e}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega$$

dans  $\mathcal{C}$

D'où : • Pour une bobine :

$$\underline{u} = L \frac{di}{dt} \rightarrow \underline{u} = L j\omega \underline{i}$$

$$\underline{u} = \underline{z} \underline{i} \text{ avec } \underline{z} = jL\omega$$

- Pour un condensateur :

$$\underline{i} = C \frac{du}{dt} \rightarrow \underline{i} = C j\omega \underline{u}$$

$$\underline{u} = \underline{z} \underline{i} \text{ avec } \underline{z} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'équation (1) peut donc s'écrire dans  $\mathbb{C}$

$$b_0 \underline{z}(t) + b_1 \frac{d\underline{z}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 \underline{z}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{z}(t)}{dt^m} = a_0 \underline{e}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m \underline{e}(t)}{dt^m} \quad (2)$$

avec les  $b_i$  et les  $a_i$  réels (car  $\text{Re}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ )

soit  $b_0 \underline{z} + b_1 j\omega \underline{z} + b_2 (j\omega)^2 \underline{z} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{z} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{e}$

soit, en factorisant par  $\underline{z}$  et par  $\underline{e}$  :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}$$

soit 
$$\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}$$

A l'ordre 2 (au programme) :

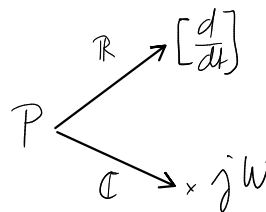
$$\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

$\left. \begin{matrix} a_0, a_1, a_2 \\ b_0, b_1, b_2 \end{matrix} \right\}$  sont réels

### 3) Notations de Laplace et transposition entre le domaine temporel

#### et le domaine fréquentiel

Notation  
de Laplace



$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \quad (a_i \text{ et } b_i \text{ réels})$$

soit  $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2] s = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2] e$

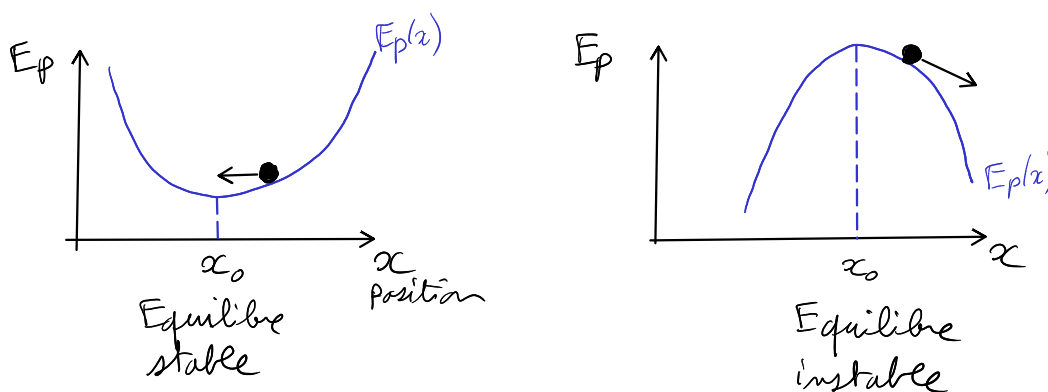
et donc  $b_0 z(t) + b_1 \frac{dz(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$

### III) Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

#### 1) A partir de l'équation différentielle

Ces problèmes de stabilité ont déjà été étudiés en mécanique : nous allons généraliser cette étude en électricité.

- Rappel : Prenons l'exemple d'une bille placée dans un puits de potentiel, ou proche d'un maximum :



Écartons la bille de sa position d'équilibre  $x_0$ .

Dans le cas ● d'un équilibre stable : la bille est ramenée vers  $x_0$

- d'un équilibre instable : la bille s'en écarte

Si les forces s'appliquant sur la bille dérivent d'une énergie potentielle, il suffit de rechercher si l'équilibre correspond à un minimum ou à un maximum de  $E_p(x)$  pour en déduire la stabilité.

Sinon, il faut revenir à l'équation du mouvement, écarter la bille de sa position initiale au départ, et étudier si elle revient alors vers  $x_0$  ou au contraire si elle s'en éloigne.

Pour cela, nous allons appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique, et obtenir une équation différentielle du mouvement dont la solution est de la forme :

$$x(t) = \text{sol particulière } x_0 \text{ (équilibre)} + \text{sol ESSM (Homogène)}$$

ou

0

STABLE

diverge

INSTABLE

→ Quand la solution homogène tend vers 0,  $x(t)$  tend vers la solution particulière qui est l'équilibre : le système est stable

→ Quand la solution homogène diverge,  $x(t)$  diverge et le système est instable

En électricité, nous pouvons utiliser la même méthode pour étudier la stabilité :

① Recherche de l'équation différentielle

$$b_0 s(t) + b_1 s'(t) + b_2 s''(t) = a_0 e(t) + b_1 e'(t) + b_2 e''(t)$$

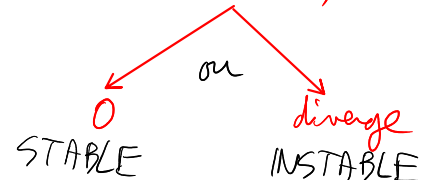
$e(t)$  est imposé, donc le second membre est connu

② La solution est alors

$$s(t) = s_p(t) + s_h(t)$$

solution particulière  
= régime permanent

solution homogène  
(sol. ESSM)



L'ensemble de la solution  $s_p(t) + s_h(t)$  décrit le régime transitoire

Le système est stable si la solution homogène  $s_h(t)$  tend vers 0

Dans le cas d'un système stable, une fois le régime transitoire terminé, le régime établi (ou permanent) est décrit par la solution particulière de l'équation différentielle

Remarques : • Dans le cas d'un régime libre :  $e(t) = 0 \forall t$

La solution particulière est alors  $s_p(t) = 0$

• Il existe théoriquement une situation à part pour laquelle  $s_h(t)$  ne diverge pas et ne tend pas non plus vers 0. Ce cas à part sera mis à profit dans un chapitre ultérieur pour concevoir des oscillateurs électroniques quasi-sinusoïdaux.

Pour un système stable :

- Au départ : régime transitoire :

$$s(t) = s_p(t) + s_H(t)$$

- Puis à la fin du régime transitoire, c'est le régime établi :  $s(t) = s_p(t)$

Pour un système instable :

- $s_H(t)$  diverge, donc  $s(t)$  s'éloigne de  $s_p(t)$



En électronique, quand l'entrée  $e(t)$  est sinusoïdale (régime sinusoïdal forcé),

la solution particulière est également sinusoïdale.

La solution  $s(t) = s_0 |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi')$

EST la solution particulière correspondant au régime permanent.

Pour que cette solution soit effectivement observée une fois le régime transitoire terminé, il est nécessaire que  $s_H(t)$  tende vers 0, c'est à dire qu'il faut au préalable s'assurer que le système est stable.

Nous allons maintenant étudier en détail la stabilité des systèmes linéaires d'ordre 1 et 2, et donner un critère de stabilité directement à partir des fonctions de transfert.

### a) Stabilité d'un système d'ordre 1

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p} = \frac{s}{e} \quad \text{avec} \quad b_0 \neq 0 \text{ et } b_1 \neq 0$$

donc  $(b_0 + b_1 p)s = \underbrace{(a_0 + a_1 p)}_{\text{second membre}} e$

Équation sans second membre  $= b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} = 0 \quad (1)$

de solution  $s_H(t) = A e^{-\frac{b_0}{b_1} t}$

$\rightarrow 0$  stable si  $b_0$  et  $b_1$  même signe

$\rightarrow +\infty$  instable si  $b_0$  et  $b_1$  de signes opposés

Remarque : l'équation caractéristique (EC) de (1) est :

$$b_0 + b_1 s + b_2 s^2 = 0 \rightarrow \text{c'est le polynôme au dénominateur de } H(p) !$$

### b) Stabilité d'un système d'ordre 2

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{s}{e} \text{ avec } b_0 \neq 0, b_1 \neq 0 \text{ et } b_2 \neq 0$$

L'équation sans second membre est donc :

$$b_0 s(t) + b_1 s'(t) + b_2 s''(t) = 0 \quad (2)$$

d'équation caractéristique (EC)  $b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$

$$\Delta_{EC} = b_1^2 - 4b_0 b_2$$

• Cas  $\Delta > 0$  solutions de l'EC :  $s_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2}$   
( $b_1^2 > 4b_0 b_2$ )

La solution de (2) est donc

$$s_h(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

le système est stable  $\Leftrightarrow s_1 < 0$  ET  $s_2 < 0$

//  $\Leftrightarrow s_1 + s_2 < 0$  ET  $s_1 \cdot s_2 > 0$

//  $\Leftrightarrow -\frac{b_1}{b_2} < 0$  ET  $\frac{b_1^2 - \Delta}{b_2^2} > 0$

//  $\Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} > 0$  ET  $b_0 b_2 > 0$

**stable  $\Leftrightarrow b_0, b_1$  et  $b_2$  de même signe**

• Cas  $\Delta = 0$   $b_0$  et  $b_2$  sont de même signe

$$(b_1^2 = 4b_0 b_2)$$

sol de l'EC :  $s_{\text{double}} = \frac{-b_1}{2b_2}$

solution  $s_H(t) = (A + B t) e^{r t}$

synt stable  $\Leftrightarrow r < 0$

stable  $\Leftrightarrow b_1$  et  $b_2$  de même signe

Or  $b_0$  est déjà de même signe que  $b_2$  donc

stable  $\Leftrightarrow b_0, b_1, b_2$  de même signe

• Cas  $\Delta < 0$  sol EC:  $\underline{\omega} = \frac{-b_1 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2b_2}$  dans  $\mathbb{C}$  !  
 ( $b_1^2 < 4b_0 b_2$ )

$s_H(t) = A e^{\text{Re } t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

avec  $\text{Re} = \text{Re}(\underline{\omega}) = \frac{-b_1}{2b_2}$  et  $\omega = \text{Im}(\underline{\omega}) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2b_2}$

système stable  $\Leftrightarrow \frac{-b_1}{2b_2} < 0 \Leftrightarrow b_1$  et  $b_2$  de même signe

Or  $4b_0 b_2 > b_1^2 > 0$  donc  $b_0$  et  $b_2$  sont de même signe

### Conclusion

Filtre d'ordre 1 stable  $\Leftrightarrow b_0$  et  $b_1$  de même signe

Filtre d'ordre 2 stable  $\Leftrightarrow b_0, b_1$  et  $b_2$  de même signe

Ce résultat simple va nous permettre de donner un critère de stabilité directement à partir de la fonction de transfert.

## 2) A partir de la fonction de transfert

On a 
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

L'équation caractéristique est donnée par  $D(p)$

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients  $b_i$  du polynôme  $D(p)$  au dénominateur de la fonction de transfert  $H(p)$  sont de même signe

Remarque : Tous les systèmes passifs en électronique sont stables (associations de R, L, C, ...)

Il faut au moins un composant actif apportant de l'énergie pour rendre le système instable et provoquer une divergence.

Cela pourra être le cas quand nous introduirons les A.L.I. (Amplificateurs Linéaires Intégrés) qui seront étudiés dans un chapitre ultérieur.

→ Exemple : traiter les exemples suivants :

- L'oscillateur harmonique amorti en mécanique
- Le circuit RLC en électricité

pour constater que l'équation différentielle sans second membre contient 3 coefficients tous positifs

⇒ ces systèmes (passifs) sont stables