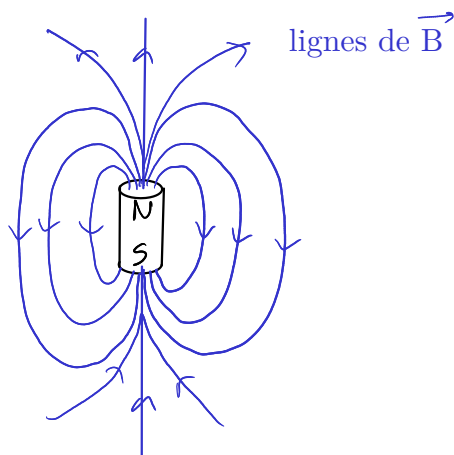


Les milieux magnétiques

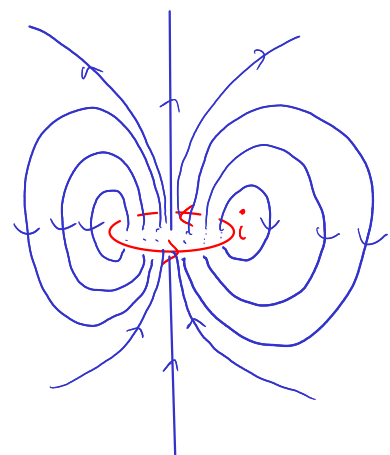
I) Le dipôle magnétique

1) Champ créé par un dipôle magnétique

Champ créé par un petit aimant



Champ créé par une petite spire parcourue par un courant i



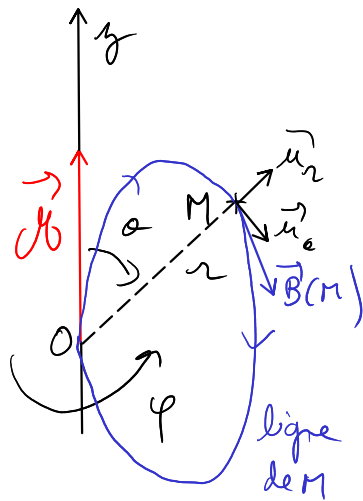
Le champ B créé par un petit aimant où une petite spire de courant est le même, sauf dans la zone proche de la source

Notons $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique de la spire (ou aimant) :

Par définition : $\vec{\mathcal{M}} = i \iint_S d\vec{S} = i \vec{S}$ avec \vec{S} surface orientée s'appuyant sur la spire :



Expression du champ \vec{B} créé par le dipôle en coordonnées sphériques :



- Le plan P contenant M et (Oz) est plan de symétrie de i donc \vec{B} n'a pas de composante en \vec{u}_φ
- Il y a invariance du courant par rotation en φ donc B ne dépend pas de φ .

$$\vec{B}(M) = \begin{vmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{vmatrix}_{r, \theta, \varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\mu_0}{4\pi} & \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} & \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \end{vmatrix}_{r, \theta, \varphi}$$

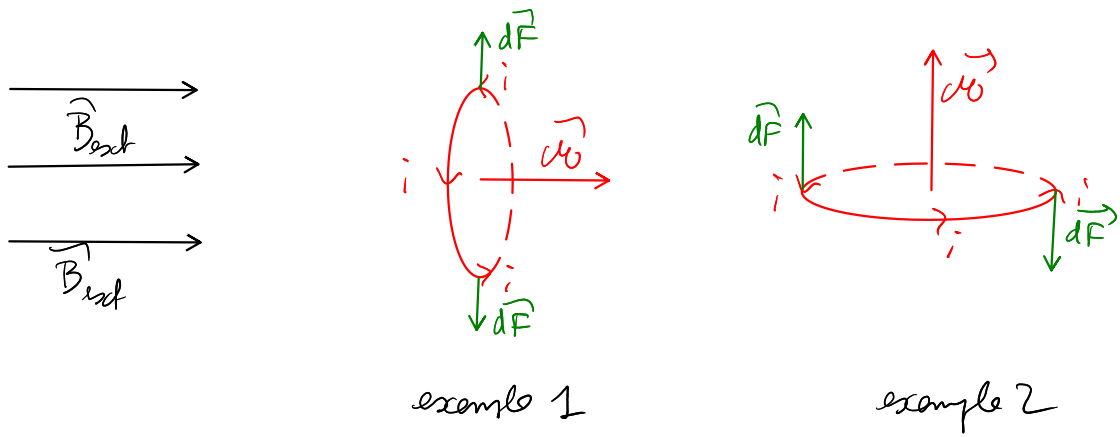
avec $\mathcal{M} = \|\vec{\mathcal{M}}\|$ et $\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S} = i \pi R^2 \vec{u}_z$
pour une boucle de courant circulaire de rayon R.

Pour un aimant, on définit son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ comme celui de la boucle de courant qui donnerait le même champ \vec{B}

2) Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ \vec{B} extérieur

\vec{B}_{ext} = créé par des sources extérieures (autres que le dipôle)

Soit un champ \vec{B}_{ext} uniforme, et plaçons un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans ce champ pour étudier son action



Chaque petit élément $i d\vec{\ell}$ de la spire est soumis à une petite force $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

La figure ci-dessus représente ces petites forces $d\vec{F}$ dans deux situations différentes :

Exemple 1 $\rightarrow \vec{n} \parallel \vec{B}_{ext}$

Exemple 2 $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{B}_{ext}$

On remarque que dans tous les cas la résultante des forces $d\vec{F}$ est nulle, ce qui est vrai quand \vec{B} est uniforme

Par contre on constate un couple de forces \vec{T} qui tend à faire tourner la spire pour aligner \vec{n} à \vec{B}

On admet

$$\vec{F} = \vec{0}$$

si \vec{B}_{ext} est uniforme

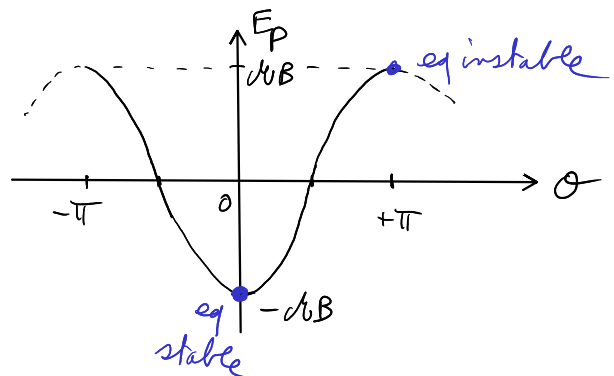
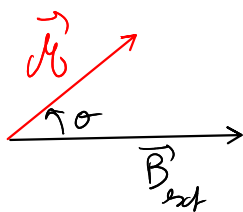
$$\vec{T} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Couple de forces agissant sur \vec{n}

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Énergie potentielle du dipôle placé dans \vec{B}_{ext}

Si \vec{B}_{ext} non uniforme, \vec{F} peut être déduite de $\vec{F} = -\text{grad } E_p$



$\theta = 0$ est un équilibre stable (minimum de E_p)
 $\theta = \pi$ est un équilibre instable (maximum de E_p)

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}} \text{ tend à s'aligner sur } \vec{B}$

3) Rapport gyromagnétique et magnéton de Bohr

Modèle semi classique de l'atome :

\rightarrow un électron de charge (-e) et de masse m_e en orbite autour du noyau

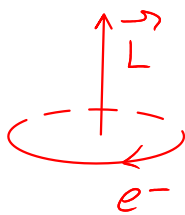
\rightarrow on lui associe une petite boucle de courant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dit orbital

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma_0 \vec{L}$$

avec

$$\gamma_0 = \frac{-e}{2m_e} \quad \text{rapport gyromagnétique de l'électron}$$

$\vec{L} =$ moment cinétique orbital



Modèle de l'atome de Bohr

$$L = n\hbar \quad \text{quantifié}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

donc $|\vec{\mathcal{M}}| = n \frac{e\hbar}{2m_e}$

Notons $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et donc $\mathcal{M} = n\mu_B$

joue le rôle de quantum de moment magnétique

En réalité : \vec{M}_{tot} moment magnétique : atomique
 de spin
 orbital

II) Les milieux magnétiques

1) Aimantation

Milieux magnétiques : ce sont des milieux qui s'aimantent sous l'effet d'un champ magnétique externe (aimantation induite)

Quand ces milieux sont soumis à un champ \vec{B}_{ext} , les moments cinétiques orbitaux ont tendance à s'aligner sur ce champ \vec{B} , ce qui crée cette aimantation

Substances magnétiques : • fer, cobalt, nickel

- L'aimantation a été observée pour la première fois sur le fer d'où le nom de ferromagnétisme
- Le néodyme ou d'autres terres rares permettent d'avoir des aimantations permanentes importantes

Remarque : • \vec{M}_{total} est proportionnelle au nombre d'atomes présents dans le milieu c'est donc une grandeur extensive

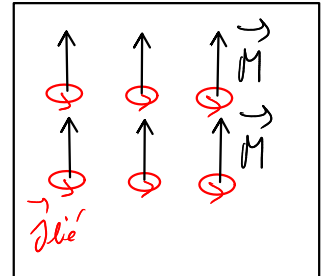
• La grandeur intensive associée qui est donc une caractéristique propre aux matériaux est $\vec{M} = \frac{\vec{M}}{V}$:

$$\vec{M} = \frac{\mu_0}{V}$$

s'appelle le **vecteur aimantation**
(moment magnétique par unité de volume)

Le vecteur aimantation est donc associé à des mini-boucles de courant
(rotation des électrons liés)

On a $\vec{j}_{lié} = \text{rot } \vec{M}$ (admis)



Problème : Ces $\vec{j}_{lié}$ créent leur propre champ B

Que deviennent alors les équations de Maxwell ?

2) Les équations de Maxwell

Reprenons les deux équations de Maxwell faisant intervenir le champ \vec{B} :

$$\begin{cases} \text{MT} & \text{div } \vec{B} = 0 & \text{inchangée} \\ \text{MA} & \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\underbrace{\vec{j}_c}_{\text{Courant de conduction}} + \underbrace{\vec{j}_{lié}}_{\text{aimantation}}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

~~ARQS~~

(électrons de conduction)

Or $\vec{j}_{lié} = \text{rot } \vec{M}$

donc $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \text{rot } \vec{M})$

soit $\text{rot} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_c$

ou encore $\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_c$

Noté \vec{h}

En notant par définition de $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
 soit $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ avec \vec{H} le vecteur excitation magnétique

Il vient alors :

LOCALE

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_c \text{ (courants)} \end{array} \right. \text{ avec } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

dans les milieux magnétiques

* Conséquence : les écritures intégrales (globales) des équations de Maxwell deviennent :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \vec{B} \text{ est un flux conservatif}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enclosé}} \quad \text{Théorème d'Ampère}$$

IV) Les divers matériaux ferromagnétiques

1) Les milieux L I H

L I H : Linéaire, isotrope, homogène

→ Linéaire : \vec{M} aimantation est proportionnelle à \vec{B}
 Or $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ et $\vec{M} \propto \vec{B}$ donc $\vec{M} \propto \vec{H}$
 Notons χ la constante de proportionnalité entre \vec{M} et \vec{H} :

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad \chi = \text{susceptibilité magnétique}$$

On a donc $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H})$
 soit $\vec{B} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\text{noté } \mu_r} \vec{H}$

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \\
 &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\
 &= \mu \vec{H}
 \end{aligned}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{aligned}
 \vec{M} &= \chi \vec{H} \\
 \mu_r &= 1 + \chi \\
 \mu &= \mu_0 \mu_r
 \end{aligned}$$

- $\chi =$ susceptibilité magnétique sans unité
- $\mu_r = (1 + \chi)$ perméabilité magnétique relative sans unité
- $\mu = \mu_0 \mu_r$ perméabilité du matériau en H/m
- μ_0 perméabilité du vide en H/m

→ Homogène

→ Isotrope

Les milieux L. I. H. sont des aimants induits

- quand $B = 0 \Rightarrow M = 0$ non aimanté
- quand $B \neq 0 \Rightarrow M \neq 0$ aimanté

2) Le milieu ferromagnétique réel

- Le modèle L I H est un modèle simplifié
- Il existe principalement deux écarts à ce modèle :

- présence d'une saturation à B élevé
- présence d'un hystérésis

a) la saturation :

L'aimantation M ne peut pas dépasser une certaine valeur M_{sat}
(aimantation de saturation)

Pour un fer doux :

→ il y a une zone linéaire L.I.H.

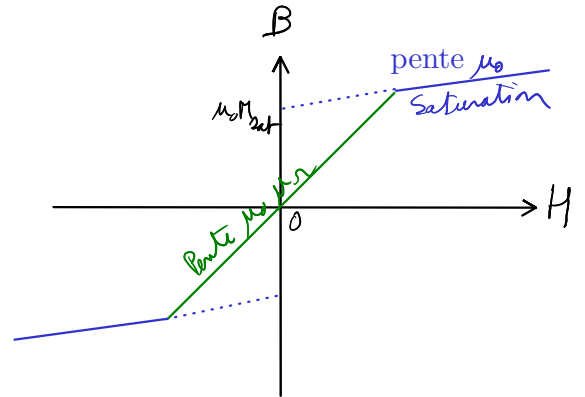
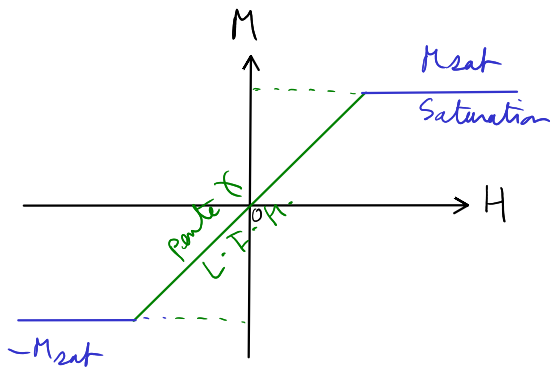
$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= \chi \vec{H} \\
 \vec{B} &= \mu \vec{H}
 \end{aligned}$$

→ il y a une zone saturée :

$$\vec{M} = \vec{M}_{sat}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_{sat})$$

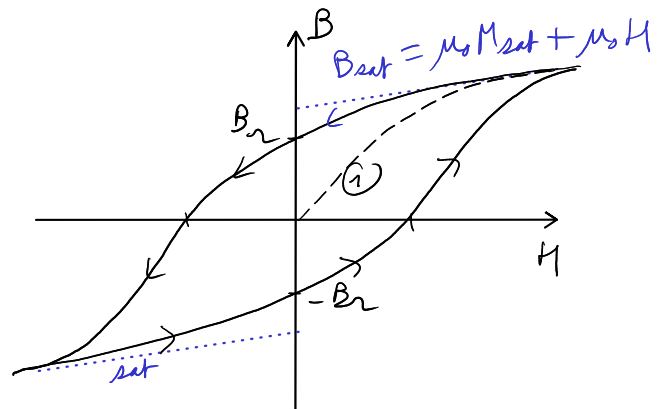
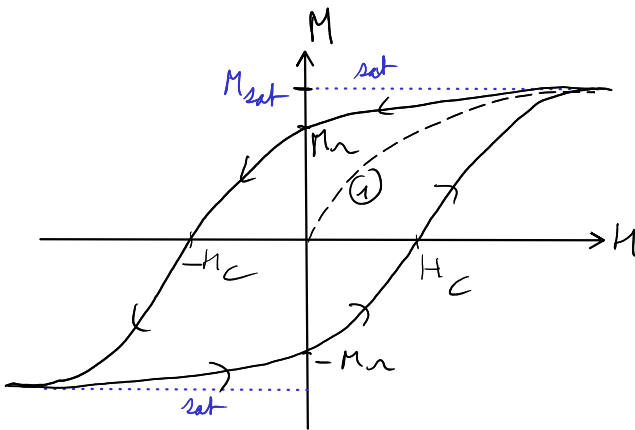
$$= \underbrace{\mu_0 \vec{M}_{sat}}_{\vec{B}_r} + \mu_0 \vec{H}$$



b) L'hystérésis

Si le fer est "dur" Il garde la mémoire de l'aimantation :

en ramenant H à 0 : le matériau reste en partie aimanté



① Courbe de première aimantation

M_r = Aimantation rémanente

H_c = Excitation coercitive

B_r = Champ magnétique rémanent

$$\underline{OG} : \begin{cases} B_{sat} \sim 1,5T \\ \mu_r \sim 2000 \end{cases}$$

$$(B_{tene} \sim 4 \cdot 10^{-5} T)$$

Selon l'hystérésis, les milieux ferromagnétiques sont classés en deux catégories :

→ Le fer doux : l'hystérésis est très peu marqué

Quand il n'est pas saturé Le fer doux peut être considéré L. I. H.

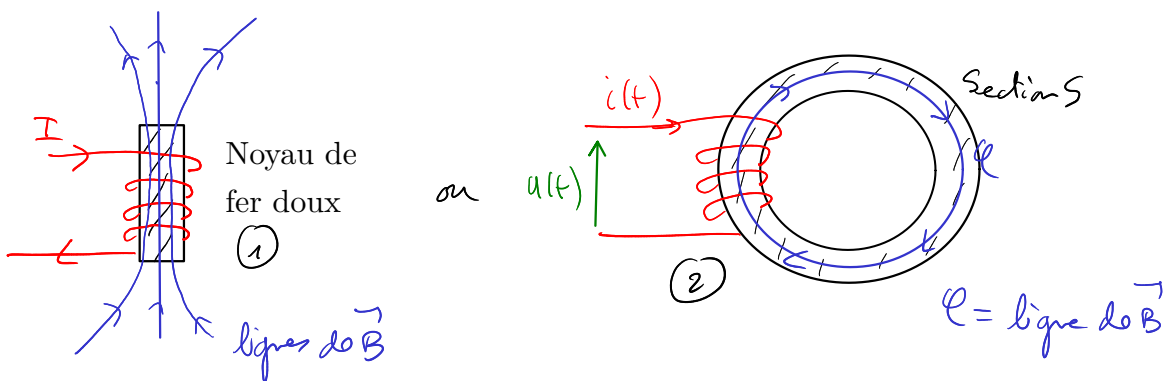
Utilisation : transformateur, électro-aimant (aimantation contrôlée par I)

→ Le fer dur : l'hystérésis est très marqué

Utilisation : aimant permanent

3) L'aimantation induite

Pour aimanter en fer doux, on utilise un bobinage parcouru par un courant I :



Cas (2) :

- Conservation du flux de B Si la section S du fer doux reste constante alors B reste constant le long de la ligne de B

- Théorème d'Ampère le long d'une ligne de B notée $l =$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_s l = I_{\text{enlacé}} = NI$$

donc $H = \frac{NI}{l}$

L'excitation H est proportionnelle à I

Calculons la tension $u(t) =$

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - N \frac{d\phi_{1\text{spire}}}{dt} = - N \frac{d}{dt} (B(t) S)$$

donc $u = -e = NS \frac{dB(t)}{dt}$

Conclusion $\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} \text{ est liée au courant } i \\ \text{La tension observée est liée aux variations de } \vec{B} \end{array} \right.$

Calculons l'inductance L :

• Par définition de L : $\phi_{\text{ct}} = L I$ avec ϕ_{ct} le flux à travers les N spires de son propre champ \vec{B}

$$H = \frac{NI}{l} \quad \text{or} \quad B = \mu H$$

donc $B = \frac{\mu NI}{l}$ et $\phi_{1\text{spire}} = BS = \frac{\mu NS}{l} I$
(Si l'on considère que \vec{B} est uniforme sur une section)

$$\phi_{\text{ct}} = N \phi_{1\text{spire}} = \frac{\mu N^2 S}{l} I$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu N^2 S}{l} = \mu_r \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

Rappel : dans l'air, un solénoïde rectiligne indéfini de N spires et de longueur l

a une inductance : $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

L'ajout d'un noyau ferromagnétique a pour conséquence de multiplier l'inductance par un facteur μ_r ($\mu_r \sim 1000$) L est plus grand !

4) Relevé expérimental de la caractéristique d'un matériau

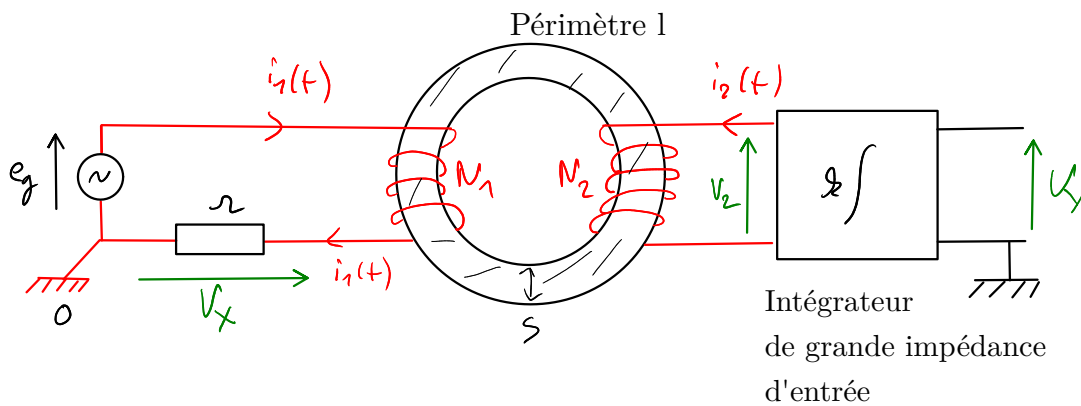
Remarque : Si le milieu présente un hystérésis, il est non linéaire.

En appliquant une tension sinusoidale en entrée, la tension de sortie (dans le secondaire) présente des harmoniques (on purement sinusoidale)

Nous avons vu que H dépend de \dot{B} : pour balayer l'ensemble des valeurs nous mettons donc une source sinusoidale en entrée

- Une résistance r dans le primaire permet d'observer $i_1(t)$ à l'oscilloscope, donc $H(t)$
- La tension est proportionnelle à $\frac{dB}{dt}$: l'ajout d'un intégrateur dans le secondaire permet donc d'observer $B(t)$

L'oscilloscope en mode (X,Y) permet donc d'observer $B(t)$ en fonction de $H(t)$:



Theorème d'Ampère sur une ligne de courant dans le ferro :

$$H_x l = N_1 i_1 + \underbrace{N_2 i_2}_{\approx 0}$$

donc $V_x = r i_1$

$$V_x(t) = \frac{r l}{N_1} H(t)$$

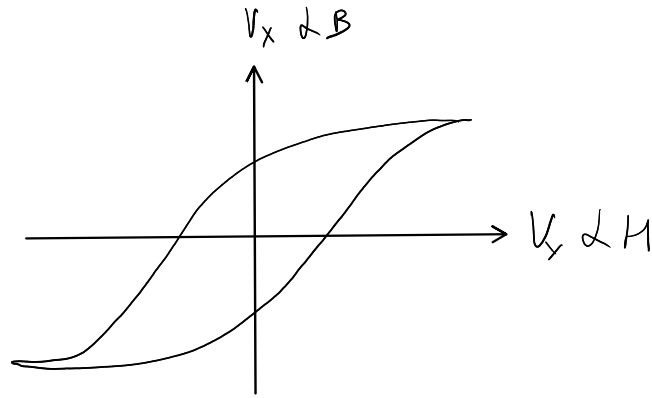
$$\Rightarrow i_2 \approx 0$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{\text{mise}}}{dt} = N_2 S \frac{dB}{dt}$$

$$V_y = \int V_2(t) dt = \int N_2 S dB$$

$$V_y(t) = N_2 S B(t)$$

Oscillo mode (X,Y) :



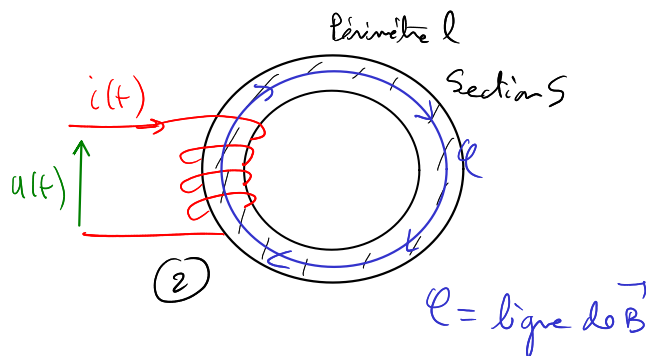
5) Effet dissipatif dans le matériau en régime variable

- (1) Il y a les pertes par **courant de Foucault** → en f^2 (f : fréquence)
 → en R^4 (R : rayon du fer)

Solutions : - feuilletage Feuille d'épaisseur a ($a \ll R$)
 - basse fréquence (solty)

- (2) Il y a les pertes par **hystérésis**

Alimentons le circuit électrique magnétisant $u(t), i(t)$.



La puissance fournie par le générateur est perdue dans le circuit magnétique

Sa puissance $p(t)$ est :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad \text{Or} \quad u(t) = -e(t) = N S \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\text{et} \quad N i(t) = H(t) \cdot l \quad (\text{Th Ampère})$$

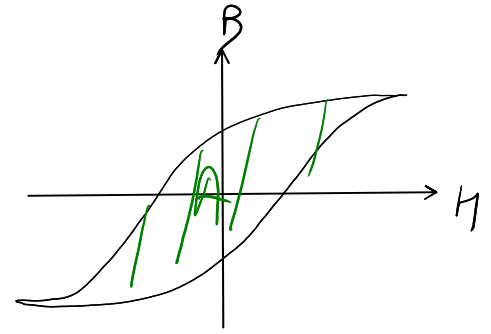
$$\text{donc} \quad p(t) = N S \frac{dB(t)}{dt} \times \frac{H(t) \cdot l}{N} = \underbrace{S \cdot l}_V H(t) \frac{dB(t)}{dt}$$

$V = \text{Volume du fer}$

La puissance totale perdue sur une période est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^T p(t) dt \\ &= V \times \int_0^T H(t) \frac{dB}{dt} dt \quad A \end{aligned}$$

Aire du cycle d'hystérésis !



Les pertes sont donc proportionnelles l'aire du cycle d'hystérésis et au volume V du fer

6) Énergie magnétique emmagasinée par un fer L. I. H.

Revenons au montage précédent avec un fer L. I. H.

L'énergie emmagasinée est : $W_B = \frac{1}{2} L I^2$

avec $L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$ (voir 3)) donc : $W_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu N^2 S}{\ell} \right) I^2$

Or $H \cdot \ell = NI$ et $B = \mu H = \frac{\mu NI}{\ell}$

donc $W_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \underbrace{(S \cdot \ell)}_{V}$

L'énergie magnétique par unité de volume est donc :

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

On admet que cela se généralise

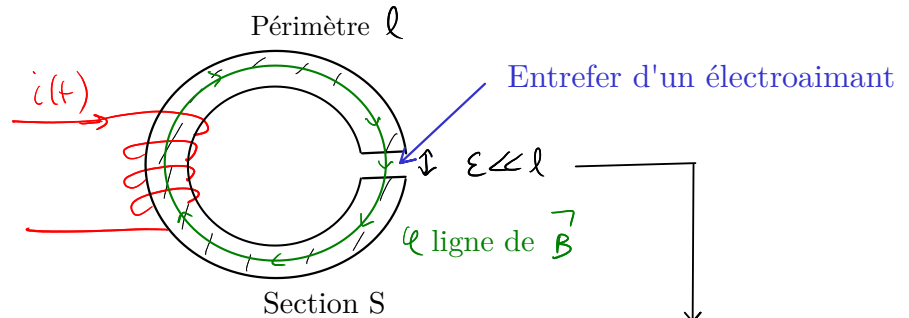
et l'énergie totale dans un circuit magnétique est donc

$$W_B = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} dV$$

V) Circuit magnétique à entrefer

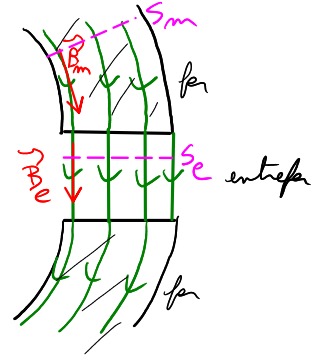
Coupons le circuit magnétique sur une petite longueur ε , appelé entrefer

L'entrefer est vide (ou dans l'air) :



Dans le fer : $S = d \cdot s$ donc $B = d \cdot s$ donc $H = d \cdot s$
le long d'une ligne de champ.

On admet que les lignes sortent et entrent perpendiculairement à l'interface fer/air : ces lignes restent parallèles entre elles dans l'entrefer, donc :



- Conservation du flux de \vec{B} :

$$B_m S_m = B_e S_e \text{ avec } S_m = S_e \text{ donc } \boxed{B_m = B_e}$$

- Théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N i \quad \text{soit} \quad \underbrace{H_m \cdot l}_{\text{dans le fer}} + \underbrace{H_e \cdot \varepsilon}_{\text{dans l'entrefer}} = N i$$

→ En résumé :

$$\begin{cases} (1) & B_m = B_e \\ (2) & H_m \cdot l + H_e \cdot \varepsilon = N i \\ (3) & B_m = \mu H_m \quad (\text{dans le fer}) \\ (4) & B_e = \mu_0 H_e \quad (\text{dans l'entrefer = air}) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \frac{B_m}{\mu} \cdot l + \frac{B_e}{\mu_0} \varepsilon = N i \quad \text{avec (3) et (4)}$$

Or $B_m = B_e$ que l'on va noter B

$$\frac{B}{\mu_0} \left(\frac{l}{\mu_r} + \varepsilon \right) = N i$$

et donc

$$B = \frac{\mu_0 N i}{\left(\frac{l}{\mu_r} + \varepsilon \right)}$$

et

$$H_m = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{N i}{l + \mu_r \varepsilon}$$

et

$$H_e = \frac{B}{\mu_0} = \frac{N i}{\frac{l}{\mu_r} + \varepsilon}$$

Modèle à perméabilité "infinie" : $\mu_r \rightarrow \infty$:

$$B \simeq \frac{\mu_0 N i}{\varepsilon} \quad H_m = \frac{N i}{\mu_r \varepsilon} \quad \text{et} \quad H_e = \frac{N i}{\varepsilon}$$