Magnétostatique

I) Le champ magnétique

Les 2 équations de Maxwell relatives au champ $\vec{B}$ sont :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 & (1) \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}} & (2) \end{cases}$$

(1) Maxwell flux ou Maxwell-Thomson

(2) Maxwell Ampère

0 STATIQUE

Pour calculer $\vec{B}$ $\rightarrow$ Il y a un calcul direct avec la loi de Biot et Savart (hors programme)

$\rightarrow$ ou à partir de (2) écrite sous une forme intégrale (théorème d'Ampère)

1) Flux conservatif

Étudions tout d'abord l'équation de Maxwell Thomson :

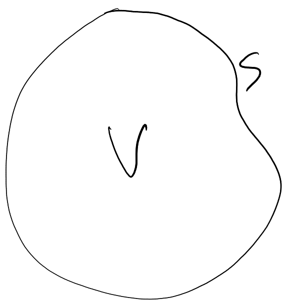
MT : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$ $\rightarrow$ $\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{B}\,.\,dV = 0$

Locale

$\downarrow$ Green-Ostrogradski

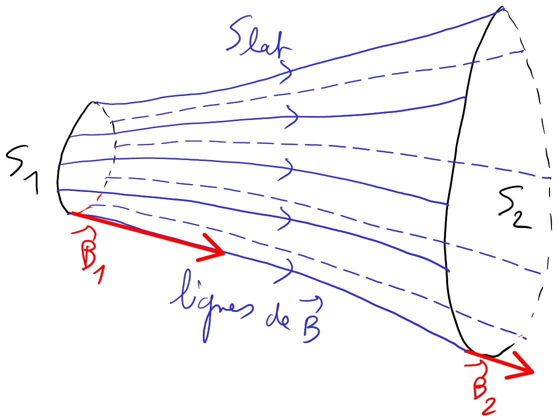
$$\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{B}\,.\,\vec{dS} = 0}$$

Globale



Le flux de $\vec{B}$ est conservatif

Application à un tube de champ $\vec{B}$



$S = S_1 + S_{lat} + S_2$

$S =$ surface fermée

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0 \quad \text{donc} \quad \underbrace{\iint_{S_1} \vec{B}\cdot\vec{dS}}_{\phi_1} + \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{B}\cdot\vec{dS}}_{0} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{B}\cdot\vec{dS}}_{\phi_2} = 0$$

donc $|\phi_1| = |\phi_2|$ $\rightarrow$ Flux conservatif travers une section de tube de $\vec{B}$

Si $S_2 > S_1$ alors $B_2 < B_1$

$\rightarrow$ L'écartement des lignes de $\vec{B}$ est lié à la décroissance de B

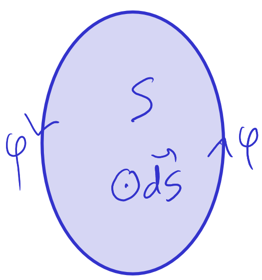
$\rightarrow$ Si les lignes se resserrent $\vec{B}$ augmente

2) Le théorème d'Ampère

Considérons maintenant l'équation de Maxwell Ampère :

$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (statique) $\rightarrow \iint_S \vec{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_S \mu_0 \vec{j}\cdot\vec{dS}$

Locale



Théorème de Stokes-Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \underbrace{\iint \vec{j}\cdot\vec{dS}}_{I_{enlacé}}$$

soit $\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \, I_{enlacé}}$ Théorème d'Ampère

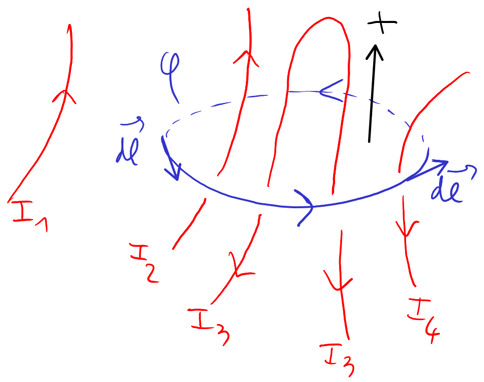
Globale

$I_{enlacé}$ = courant enlacé par le contour $\mathcal{C}$

μ_0 = Perméabilité magnétique du vide

⚠ (Attention au signe de i : le contour $\mathcal{C}$ est orienté, et $I_{enlacé}$ est algébrique
(signe selaon la "règle du tire-bouchon" ou du "bonhomme d'Ampère")

Exemple :



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \left(+I_2 + I_3 - I_3 - I_4\right)$$

II) Application du théorème d'Ampère

1) Méthode

1. Étude des symétries et invariances $\Rightarrow$ dépendance et direction de $\vec{B}$: $\vec{B} = B(\dots)\,\vec{u}_{\perp}$

2. Choix du contour d'Ampère

3. Application du théorème d'Ampère (⚠ Attention au signe de I !)

2) Exemples de calcul de B

Les exemples suivants sont des classiques à savoir faire

Traités en classe

- Le fil infini rectiligne
- Le fil épais et infini
- Le solénoïde infini ($\vec{B}ext = 0$ admis)
- La bobine torique

III) Les forces de Laplace

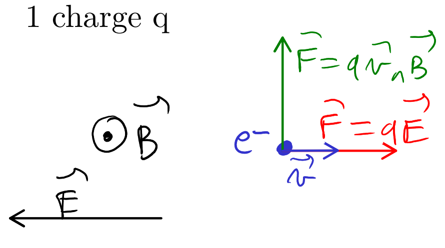
La force de Laplace est une manifestation macroscopique des forces de Lorentz (microscopiques)

→ La force de Lorentz s'applique individuellement à 1 charge q

→ La force de Laplace est la résultante de toutes les petites forces de Lorentz sur l'ensemble d'un conducteur

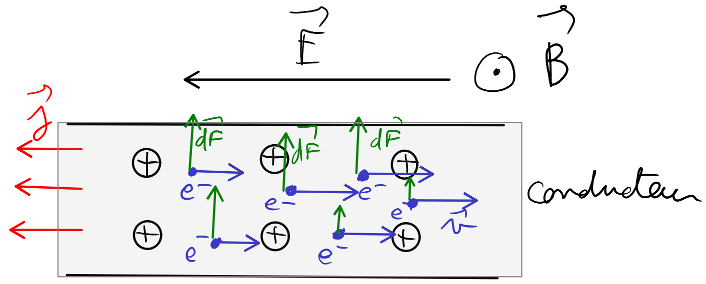
Forces de Lorentz microscopiques

1 charge q



$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Force de Laplace



⊕ Charges fixes $(\vec{v} = \vec{0})$

e^- Charges mobiles $\vec{v}$

- n charges mobiles par unité de volume
- Il y a autant de charges + que de charges -

Considérons un petit élément de volume dV du conducteur :

① $\vec{F} = q\vec{E}$ S'applique à toutes les charges dans dV

La force électrique résultante sur l'ensemble des charges contenues dans dV est :

$$d\vec{F}_{\substack{global \\ Elec}} = \sum_i q_i \vec{E} = \vec{0} \quad \text{car} \quad \sum_i q_i = 0$$

② $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ Ne s'applique qu'aux charges mobiles

donc $\vec{F}_{\substack{global \\ magn}} = \sum_i q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}$ seulement sur les électrons mobiles

Il y a $(n.dV)$ charges q mobiles dans un petit volume dV, et l'on note $\vec{v}_m$ la vitesse des charges mobiles :

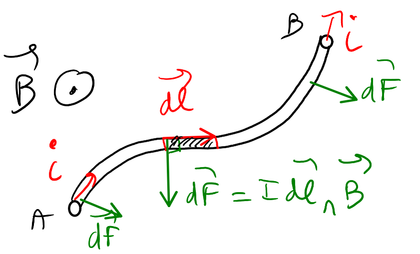
donc $$d\vec{F}_{Laplace} = (n\,dV)\,q\,\vec{v}_m \wedge \vec{B} = (n\,q\,\vec{v}_m)\wedge \vec{B}\,dV$$
$$= \vec{j} \wedge \vec{B} \,.\, dV$$

$$\boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{F}_{Laplace}}{dV} = \vec{j} \wedge \vec{B}}$$

C'est la force de Laplace par unité de volume

Cas d'un fil : Soit un petit élément $\vec{d\ell}$ de fil de volume $dV = S\,d\ell$ parcouru par u courant i, soumis à un champ $\vec{B}$:

Il subit une force de Laplace : $$d\vec{F} = (\vec{j}\,dV)\wedge \vec{B}$$
$$= (\vec{j}\,S\,d\ell)\wedge \vec{B} = (\underbrace{j\,S}_{i}\,\underbrace{d\ell\,\vec{u}}_{\vec{d\ell}})\wedge \vec{B}$$
$$= \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$



$$\boxed{d\vec{F} = i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}}$$

Force de la place s'appliquant à un petit élément $\vec{d\ell}$ de fil parcouru par un courant i

Et finalement $$\boxed{\vec{F}_{Laplace} = \int_{A\ fil}^{B} i\,\vec{d\ell}\wedge\vec{B}}$$

Formule très utile en PSI pour les machines à courant continu