

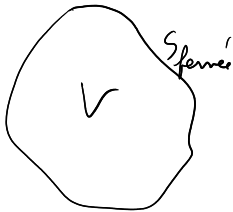
# Electromagnétisme dans le Cadre de l'A-R-Q-S.

A-R-Q-S : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.

## I) Les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS

### 1) L'équation de Maxwell Gauss

Équation locale de Maxwell Gauss :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$



Elle ne contient aucune dérivée temporelle donc reste valable en régime dynamique.

Son écriture intégrale a été vue en électrostatique et reste inchangée :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

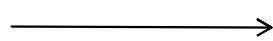
Le théorème de Gauss n'est pas modifié en régime variable.

### 2) L'équation de Maxwell Thomson

Il en est de même pour l'équation de Maxwell Thomson qui ne contient pas de dérivée temporelle :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Locale



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Intégrale.

Intégrale.

La conservation du flux de  $\vec{B}$  reste valable aussi en régime variable.

### 3) Equation de Maxwell Faraday

Eq locale de MF:  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



Considérons un contour fermé  $C$  orienté, sur lequel vient s'appuyer une surface  $S$  (ouverte), et calculons le flux de MF à travers cette surface =

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

th de Stokes Ampère

th de Schwarz

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

soit

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Loi de Faraday (induction)

En régime variable, la circulation de  $\vec{E}$  n'est plus conservative!  
→ sera approfondi plus loin dans ce chapitre.

### 4) L'équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit en régime variable:

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{j}_c \text{ le courant de conduction.}$$

$$= \mu_0 \left( \vec{j}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_c + \vec{j}_D \right)$$

$$\text{avec } \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{j}_D$  est appelé vecteur densité de courant de déplacement.



alors le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :  $\vec{j}_D \ll \vec{j}_C$

Vérification : Considérons un champ variable  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}$   
On a alors :  $\vec{j}_C = \sigma \vec{E} = \sigma E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}$   
et  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \omega E_0 \sin(\omega t + \varphi) \vec{u}$

Comparons leurs amplitudes :  $j_D \ll j_C \Leftrightarrow \epsilon_0 \omega E_0 \ll \sigma E_0$   
 $j_D \ll j_C \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Par exemple, dans le cas d'un fil de cuivre :

$$\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = 8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

La condition à vérifier est  $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx 10^{19} \text{ rad/s}$

Cette condition est toujours vérifiée !

Dans le cadre de l'ARQS ( $f \ll 10^{18} \text{ Hz}$  pour le cuivre) :

→ Equation de Maxwell Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_C + \text{négl.}$

→ Théorème d'Ampère :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{aloc}} + \text{négl.}$

Le théorème d'Ampère reste donc inchangé dans le cadre de l'ARQS dans un conducteur.

Les équations de l'électromagnétisme dans le cadre de l'ARQS dans un conducteur sont donc :

## AROS dans un conducteur:

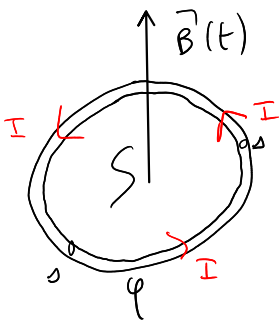
	Locale	Intégrale
MG	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ th de Gauss
MT	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ Flux conservatif
MF	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \neq 0$ la de Faraday (induction)
MA	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{0}$ <i>mejl.</i>	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \cancel{0}$ <i>mejl.</i> th d'Ampère

Seule l'équation de Maxwell Faraday est chargée en régime variable dans le cadre de l'AROS: c'est l'induction

## II) L'induction électromagnétique dans un conducteur

### 1) La loi de Faraday

Plaçons un circuit électrique fermé dans un champ  $\vec{B}(t)$



Notons  $s$  la section du conducteur,  $l$  sa longueur,  $\sigma$  sa conductivité,  $R = \frac{l}{\sigma s}$  la résistance électrique du circuit;  $I = j_c \cdot s$  l'intensité électrique.

$$\text{on a : } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (\Phi_B: \text{flux de } \vec{B} \text{ à travers } S)$$

$$\text{d'où } \oint \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

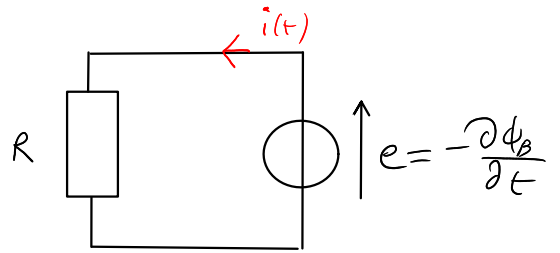
soit  $\frac{j \cdot l}{V} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$

$i \cdot \frac{j \cdot l}{V_0} = \frac{\partial \phi_B}{\partial t}$  Note  $e$  (f.e.m.)

donc  $e = R i$  avec  $e = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$  appelée force électromotrice induite (f.e.m.)

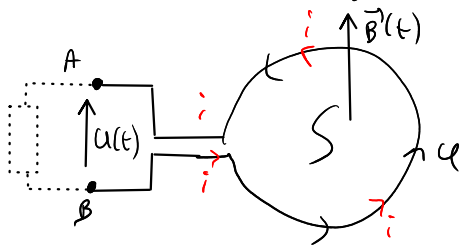
(en orientant  $i$  dans la même direction que  $e$ )

Le circuit électrique équivalent est donc :

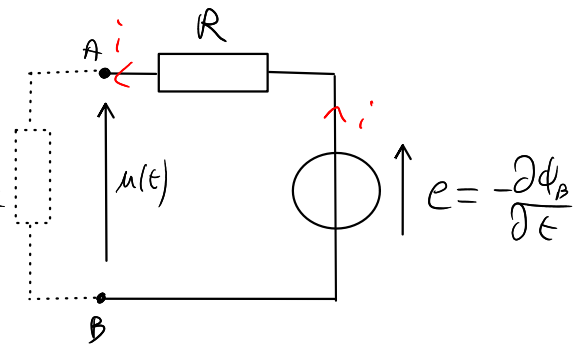


Remarque :

Dans le cas d'1 boucle quasi fermée :



circuit électrique équivalent



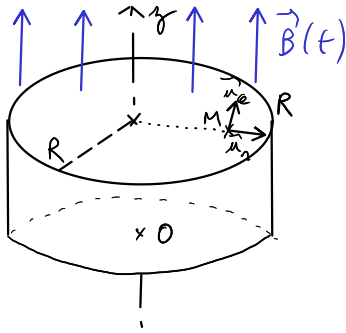
$U(t) = e(t) - R i$  en orientant  $i$  comme  $e$ .

Remarque : il y a 2 types d'induction :

→ Induction de Neumann =  $B(t)$  varie et le circuit est fixe. (c'est le cas étudié ici)

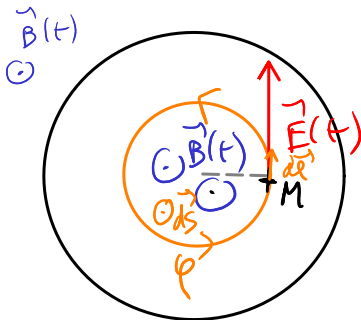
→ Induction de Lorentz =  $B$  est statique, et le circuit  $\mathcal{C}$  est mobile (hors programme)

## 2) les courants de Foucault



Plongeons un conducteur cylindrique de rayon  $R$  et hauteur  $h$  (conductivité  $\sigma$ ) dans un champ  $\vec{B}(t)$  uniforme :  
 $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ .

Vue de dessus :



Le plan contenant  $(Oz)$  et  $M$  est plan de symétrie du conducteur et de  $\vec{B}(t)$  (causes) donc  $\vec{E}$  est perpendiculaire à ce plan, donc selon  $\vec{u}_\theta$ .  
 (car  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ )

Invariances en rotation  $\alpha \Rightarrow \vec{E} = E(r, z) \vec{u}_\theta$

Appliquons la loi de Faraday sur le contour  $\mathcal{C}$  (cercle  $r = dr$  et  $z = dz$  passant par  $M$ ):

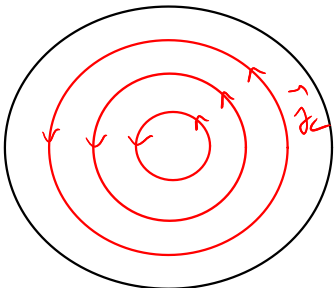
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{avec } \Phi_B = \iint_{S // \mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_B B \cdot dS = B \times \pi r^2$$

car  $B$  uniforme sur  $S$ .

$$\text{et } \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\substack{r=dr \\ z=dz}} E_\theta \cdot dl = E_\theta \oint dl = E_\theta \times 2\pi r$$

$$\begin{aligned} \text{on a alors : } (1) \rightarrow E_\theta \times 2\pi r &= -\frac{\partial}{\partial t} (B(t) \cdot \pi r^2) \\ &= -\pi r^2 \frac{\partial B(t)}{\partial t} \\ &= \pi r^2 B_0 \omega \sin \omega t \end{aligned}$$



$$\text{donc } \vec{E} = \frac{1}{2} r B_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

$$\text{or } \vec{j}_c = \sigma \vec{E} \quad \text{donc } \vec{j}_c = \frac{1}{2} \sigma r B_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_\theta.$$

Il y a donc apparition d'un courant appelé courant de Foucault, sous forme de boucles concentriques.

L'apparition de courants de Foucault dans les conducteurs s'accompagne de pertes par effet Joule.

Calculons la puissance dissipée par effet Joule.

$$\begin{aligned}\text{Par unité de volume: } \frac{\delta P_J}{d\tau} &= \vec{j} \cdot \vec{E} = \nabla E^2 \\ &= \frac{\nabla}{4} r^2 B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)\end{aligned}$$

La puissance dissipée dans l'ensemble du cylindre conducteur est donc :

$$\begin{aligned}P_J &= \iiint_{\text{cylindre}} \frac{\nabla}{4} r^2 B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \, dz \cdot r d\theta \cdot dy \\ &= \frac{1}{4} \nabla \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dy}_h \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} \nabla \omega^2 B_0^2 h R^4 \sin^2(\omega t).\end{aligned}$$

En moyenne dans le temps :

$$\langle P_J \rangle_t = \frac{\pi}{16} \nabla \omega^2 B_0^2 h R^4$$

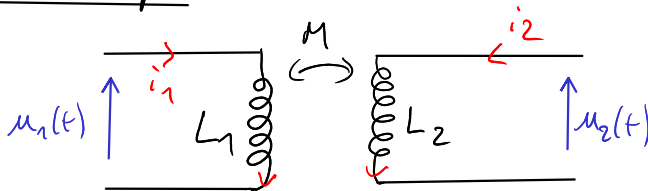
Les pertes Joule par courant de Foucault sont :

- en  $R^4$  ! la dimension transversale  $\alpha$  B augmente considérablement les pertes par courant de F
- en  $f^2$  (  retenir !)

### III) L'énergie magnétique

#### 1) Inductance propre et mutuelle inductance

Rappels de sup :



$$\phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1$$

$$\phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$$

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

$\phi_{2 \rightarrow 1}$  est le flux de  $B_2$  créé par le courant  $i_2$  à travers le circuit 1.

$$u_1 = -e_1 = \frac{d\phi_{\text{cvt} \rightarrow 1}}{dt} = \frac{d\phi_{1 \rightarrow 1}}{dt} + \frac{d\phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -e_2 = \frac{d\phi_{\text{cvt} \rightarrow 2}}{dt} = \frac{d\phi_{2 \rightarrow 2}}{dt} + \frac{d\phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \begin{matrix} \times i_1 \\ \times i_2 \end{matrix} \quad \text{Pour obtenir un bilan de puissance}$$

$$\begin{cases} P_1 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ P_2 = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

La puissance totale est donc :

$$P = P_1 + P_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

Énergie stockée dans la bobine (1)

Énergie stockée dans la bobine (2)

Énergie de couplage entre les 2 bobines

## 2) Densité volumique d'énergie magnétique

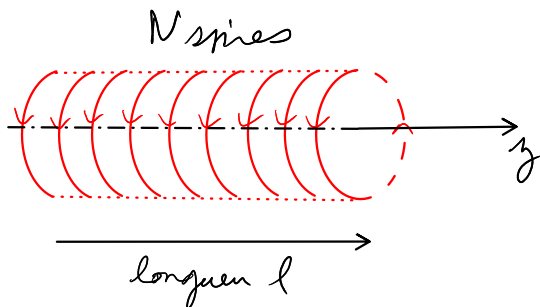
Le champ  $\vec{E}$  et le champ  $\vec{B}$  contiennent de l'énergie

On admet

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{énergie électrique volumique (déjà vu)}$$

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{énergie magnétique volumique}$$

Vérification sur le cas d'une bobine rectiligne indéfinie:



$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z$$

à l'intérieur du solénoïde  
(et l'on suppose  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur)

le flux de  $\vec{B}$  à travers 1 spire est  $\phi_{1st} = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$   
 $= \mu_0 \frac{N}{l} i S$  car  $\vec{B}$  uniforme.

et à travers les  $N$  spires:  $\phi_N = N \mu_0 \frac{N}{l} S i$

Or  $\phi_N = L i$  donc  $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

L'énergie magnétique dans la bobine est donc:

$$E_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i^2$$

Exprimons la en fonction de  $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$  :

$$E_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{\mu_0 l^2} \times S \times l = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \times \underbrace{S \times l}_V$$

$$w_B = \frac{E_B}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{Densité volumique d'énergie magnétique}$$

### 3) Couplage partiel, couplage parfait

Considérons 2 inductances d'auto-inductance  $L_1$  et  $L_2$  et de mutuelle inductance  $M$  entre elles.

L'énergie magnétique totale est :

$$E_B = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \underbrace{i_1}_{>0?} \underbrace{i_2}_{<0?}$$

Or  $E_B = \iiint_V \underbrace{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}}_{>0} dV$  donc  $E_B \geq 0$

donc  $\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0$   $\forall i_1$  et  $\forall i_2$   
 soit  $\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \left(\frac{i_2}{i_1}\right)^2 + M \left(\frac{i_2}{i_1}\right) \geq 0$  (positifs ou négatifs)

En notant  $x = \frac{i_2}{i_1}$  :  $\frac{1}{2} L_1 + M x + \frac{1}{2} L_2 x^2 \geq 0 \quad \forall x$

donc ce polynôme de  $x$  a 2 racines non réelles

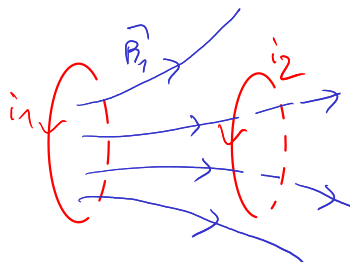
donc  $\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0$

soit  $M^2 \leq L_1 L_2$

• Cas  $M = 0$  : il n'y a aucun couplage

• Cas  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  : le couplage est dit parfait  
 c'est la plus grande valeur de  $M$  possible  
 cela correspond à la totalité des lignes de  $\vec{B}_1$  liées par le circuit (1) present dans (2), et réciproquement

• Cas  $M < \sqrt{L_1 L_2}$  :



certaines lignes de  $\vec{B}_1$  ne passent pas dans le circuit (2)