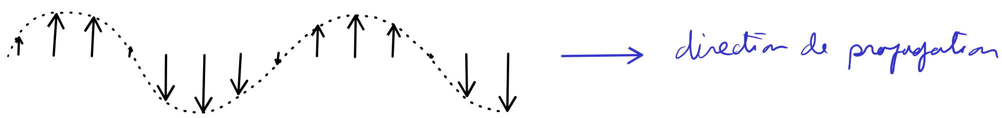
Introduction aux ondes = propagation 1D non dispersive
Equation de d'Alembert.

I) Etablissement d'une équation de d'Alembert

<u>Ondes longitudinales</u> : l'oscillation s'effectue dans la même direction que la direction de propagation :

- Acoustique dans les fluides (air ; eau)
- Certaines vibrations dans les solides

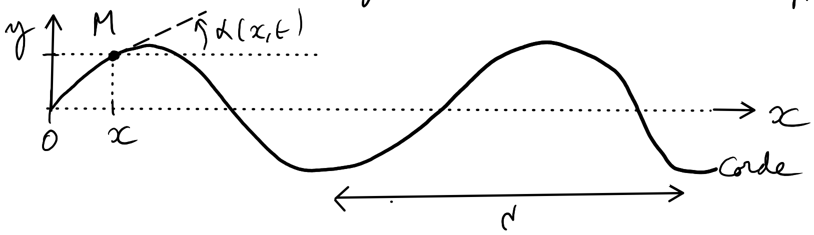
<u>Ondes transversales</u> = l'oscillation s'effectue dans la direction transverse par rapport à la direction de propagation



- corde vibrante
- vagues à la surface de la mer
- ondes électromagnétiques (lumière, radio, ...)
- Certaines vibrations dans les solides

Exemple de la corde vibrante

Considérons une corde vibrante, horizontale à l'équilibre.
Notons $y(x,t)$ son écart par rapport à la position à l'équilibre (repos) et $\alpha(x,t)$ l'angle de la corde par rapport à l'horizontale



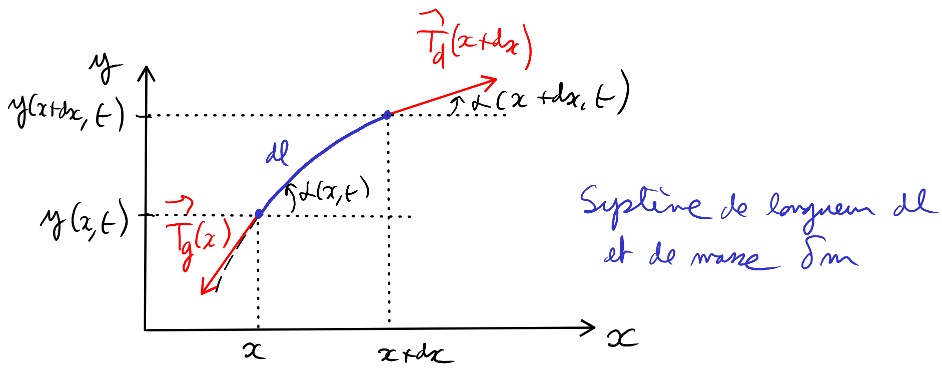
Hypothèses du modèle :

- → Corde supposée quasi-inextensible
- → Le poids n'est pas pris en compte (ne fait que modifier la position d'équilibre)
- → La corde est horizontale à l'équilibre
- → Chaque point de la corde oscille verticalement et les oscillations sont petites : $\alpha(x,t) \ll 1 \iff y(x,t) \ll \lambda$ (longueur d'onde)

On effectuera un développement limité à l'ordre 1 en α du mouvement

On considère que la corde est homogène de masse linéique $\mu = \text{cte}$ et que la tension est tangentielle à la corde

Soit un élément de corde compris entre x et $(x+dx)$ de longueur dl et de masse $\delta m = \mu dl$:



- Système : bout de corde de masse δm
- Bilan des forces : $\vec{T}_g(x)$ du reste de la corde situé à gauche ; $\vec{T}_d(x+dx)$ du reste de la corde situé à droite

poids non pris en compte (cf hypothèses)

Notons $T(x)$ la norme de $\vec{T}_g(x)$ ou $\vec{T}_d(x)$ (principe d'action/réaction : $\vec{T}_g(x) = -\vec{T}_d(x)$)

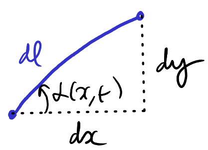
Principe fondamental de la dynamique appliqué à δm :

$$\delta m \, \vec{a} = \vec{T}_d(x+dx) + \vec{T}_g(x)$$

Projetons sur x et y (mouvement vertical) :

$$\begin{cases} (1) \quad \delta m \cdot 0 = T(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) - T(x)\cos(\alpha(x)) \\ (2) \quad \delta m \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) - T(x)\sin(\alpha(x)) \end{cases}$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 en α :



$$\cos\alpha = 1$$
$$\sin\alpha = \alpha$$
et $dx = dl\cos\alpha$ donc $dl = dx$

et $\delta m = \mu\, dl = \mu\, dx$

(1) devient : $0 = T(x+dx) - T(x)\ \forall x$, donc $T(x) = T_0$ constante

(2) devient : $\mu\, dx\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T_0\, \alpha(x+dx) - T_0\, \alpha(x)$

soit $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx}$

et en faisant tendre dx vers 0 : $\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}$ (3)

Or à l'ordre 1 en α : $\alpha(x,t) = \tan(\alpha(x,t)) = \frac{dy}{dx}$, soit, en injectant dans (3) :

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

et donc $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ $\quad$ $\frac{\mu}{T_0}$ a homogène à $\frac{1}{v^2}$ avec v une vitesse

On écrit : $\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0}$ Equation de d'Alembert 1D

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$ la célérité.

II Solution des équations de d'Alembert

1) Solution générale : les ondes progressives

La solution de l'équation de d'Alembert 1D est de la forme :

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$f(x-ct)$ est appelée onde progressive (+) $\quad$ (OPH+)

$g(x+ct)$ est appelée onde progressive (−) $\quad$ (OPH−)

Vérification : $f(u)$ avec $u = x - c.t$ solution ?

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -c \cdot \frac{df}{du}$$

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}$$

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

donc $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \frac{d^2 f}{du^2} = 0$$ (CQFD)

$$\boxed{\text{Solution générale} = (\text{OPH}+) + (\text{OPH}-)}$$

Interprétation :

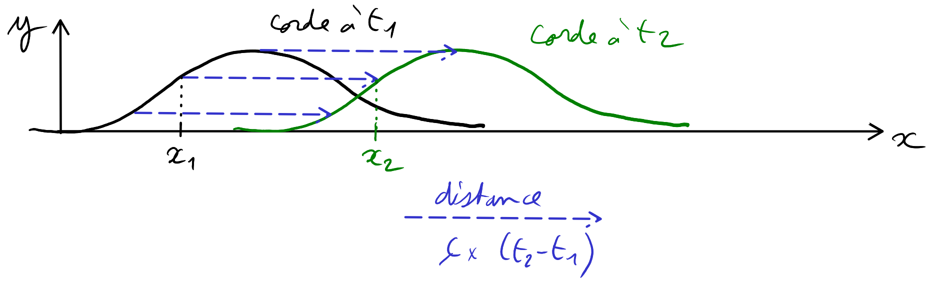
Une onde progressive (+) de la forme $f(x-ct)$ se propage sans se déformer à la vitesse c, dans le sens des x croissants

Démonstration : si $(x-ct) = \text{cte}$ alors $f(x-ct) = \text{cte}$

Soit 1 instant t_1 et une position x_1

à $t_2 > t_1$: $x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$

en se plaçant à t_2 et x_2, comme $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$, alors f sera la même. En faisant le raisonnement pour tous les points x, il suffit de se décaler de $\Delta x = c(t_2 - t_1)$ pour que f soit conservé :



2) Cas de l'onde progressive harmonique (OPH)

Les ondes sont souvent périodiques, donc décomposables en série de Fourier.
C'est un cas particulier des ondes progressives

$$f(x,t) = A\cos(k(x-ct)-\varphi) = A\cos(kx - kct - \varphi)$$

soit $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ OPH+

et $g(x,t) = B\cos(\omega t + kx + \varphi')$ OPH−

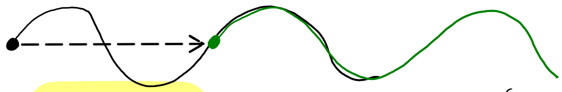
en notant $\omega = kc$

k est appelé le nombre d'onde (en m^{-1}) et $\vec{k} = k\vec{u}_z$ le vecteur d'onde

direction de propagation

ω est la pulsation (en rad/s)

λ est la longueur d'onde (en m) : c'est la périodicité spatiale de l'onde.



$\lambda = c \times T$ car pendant 1 durée T (période), l'onde a avancé d'1 "motif" (soit 1 λ)

donc $\lambda = \dfrac{c}{f}$

→ Vérifions que $f(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \varphi)$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$-A k^2 \cos(\omega t - kx + \varphi) - \frac{1}{c^2} A(-\omega^2)\cos(\omega t - kx + \varphi) = 0$$

soit $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$ soit $\omega^2 = k^2 c^2$ $(\omega > 0 ; k > 0)$

donc $\omega = kc$: la relation entre ω et k est appelée relation de dispersion

<u>Notations complexes :</u>

$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \varphi)$ → $\mathbb{C}$: $\underline{f} = A e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$

$$\underline{f} = \underbrace{A e^{j\varphi}} e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{f} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - kx)}$$

3) les ondes stationnaires

Il y a 2 manières d'aborder les ondes stationnaires

① Cas de la réflexion totale d'une onde progressive harmonique.

Soit une OPH+ qui subit une réflexion totale en bout de corde, et crée donc une OPH−. Les 2 ondes de même amplitude se croisent, et se superposent :

$$y(x,t) = \overbrace{A\cos(\omega t - kx + \varphi)}^{OPH+} + \overbrace{A\cos(\omega t + kx + \varphi')}^{OPH-}$$

$$= 2A\cos\left(\omega t + \frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\cdot\cos\left(kx - \frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$$

La solution est donc une solution à variables séparées de la forme :

$$y(x,t) = B\underbrace{\cos(kx+\varphi_1)}_{\text{fonction de } x}\cdot\underbrace{\cos(\omega t+\varphi_2)}_{\text{fonction de } t}$$

② Méthode 2 : recherche d'une solution à variables séparées

Recherchons une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :
$y(x,t) = f(x)\cdot g(t)$ à variables séparées.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x)\,g(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x)\,g''(t)$$

donc $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0$

soit $f''(x)\,g(t) = \frac{1}{c^2}f(x)g''(t)$.

Séparons les variables : $$\underbrace{\frac{f''(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{Ne dépend que de } x\\ \text{pas de } t}} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)}}_{\substack{\text{Ne dépend que de } t\\ \text{pas de } x}}$$

→ c'est donc une constante d'unité m^{-2}

Cette constante est négative, car sinon les solutions seraient exponentielles et non périodiques
Notons cette constante $(-k^2)$:

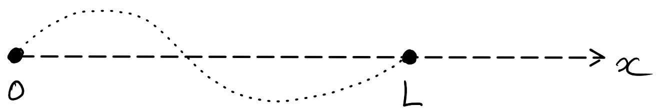
$$\begin{cases} \dfrac{f''(x)}{f(x)} = -k^2 \\[2ex] \dfrac{1}{c^2}\dfrac{g''(t)}{g(t)} = -k^2 \end{cases}$$

soit : $\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0 & \text{solution } f(x) = A' \cos(kx + \varphi_1) \\ g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 & \text{solution } g(t) = A'' \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$ avec $\omega = kc$

donc $y(x,t) = B \cos(kx + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\omega = kc$
solution identique obtenue à celle de la méthode précédente.

3) Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités

Soit une corde fixée à ses 2 extrémités $x = 0$ et $x = L$



Les conditions aux limites sont : $y(x=0, t) = 0 \quad \forall t$
$y(x=L, t) = 0 \quad \forall t$

L'onde progressive est incompatible avec ces conditions aux limites
Les ondes stationnaires de la forme $y = f(x) g(t)$ conviennent car aux x, $f(x) = 0$ on a $y(x,t) = 0 \ \forall t$.

Cherchons des solutions périodiques parmi les ondes stationnaires, soit de la forme : $y(x,t) = A \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$

→ Cette solution doit vérifier l'équation de d'Alembert, donc $\underline{\omega = kc}$

→ Cette solution doit aussi vérifier les conditions aux limites :

- <u>en $x = 0$</u> : $y(0,t) = A \sin \varphi_1 \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \ \forall t$
  Or $A \neq 0$ (solution nulle = sans intérêt) donc $\sin \varphi_1 = 0$ donc $\varphi_1 = 0$
- <u>en $x = L$</u> : $y(L,t) = A \sin(kL) \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \ \forall t$
  $A \neq 0$ donc $\sin(kL) = 0$ donc $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
  soit $k_n = n \dfrac{\pi}{L}$
  Or $\omega = kc$ donc $\omega_n = n \dfrac{\pi c}{L}$ et $f_n = n \dfrac{c}{2L}$

Les fréquences $\boxed{f_n = n \dfrac{c}{2L} \text{ sont appelées fréquences propres}}$

et sont les fréquences spontanées (propres) de la corde oscillant librement.

Recherchons les longueurs d'onde λ_n associées : $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

soit $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$ et donc $L = n \times \frac{\lambda_n}{2}$

<u>Interprétation :</u> $\frac{\lambda_n}{2}$ est la distance entre 2 noeuds de vibration.

Un noeud de vibration est un point où $y(x,t) = 0 \ \forall t$

Les 2 extrémités $x=0$ et $x=L$ étant des noeuds, il faut forcément que L, la distance entre les 2 bouts, soit un multiple entier de $\frac{\lambda_n}{2}$.

<u>Vérifions que la distance entre 2 noeuds est $\frac{\lambda}{2}$:</u>

$$y(x,t) = B \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Les noeuds sont situés aux x, $\sin(kx) = 0$, c'est à dire quand kx est un multiple de π. En appelant Δx la distance entre 2 noeuds successifs, c'est à dire 2 zéros successifs de $\sin(kx)$. On a donc

$k \Delta x = \pi$ soit $\Delta x = \frac{\pi}{k}$. Or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

<u>Représentation de la corde pour divers n :</u>

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$