Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Ce sont des ondes non matérielles

C'est un champ $\{\vec{E}(M,t) ; \vec{B}(M,t)\}$ qui se propage

Exemples

I) Les équations de propagation

On part des 4 équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \text{MG} & \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{MT} \\ \text{MF} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{MA} \end{cases}$$

Or, dans le vide : $\rho = 0$ et $\vec{j}_c = \vec{0}$

donc
$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Équation de propagation de $\vec{E}(M,t)$:

On prend $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (MF), ce qui donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Or $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

(relation vectorielle mathématique)

On obtient alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{0 \text{ avec MG}}\big) - \Delta \vec{E}$$

th de Schwarz

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = -\Delta \vec{E}$$

Or $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

donc $\quad -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Équation de d'Alembert vectorielle

En posant $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, on a :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

Même chose pour $\vec{B}(M,t)$ en partant de : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ (MA)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{B}\right) - \Delta \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 - \Delta \vec{B}$$

(Maxwell Thomson)

th de Schwarz

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\right) = -\Delta \vec{B}$$

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (MF) donc

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B}$$

soit $$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

Éq de d'Alembert vectorielle

A.N. : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m ; $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m

donc $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s

Compléments mathématiques :

Relation à connaître : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$

$$\underset{\text{Champ de vecteurs}}{\vec{A}} \xrightarrow{\text{Laplacien vectoriel}} \underset{\text{Champ de vecteurs}}{\Delta\vec{A}}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = \left| \begin{array}{l} A_x(x,y,z,t) \\ A_y(x,y,z,t) \\ A_z(x,y,z,t) \end{array} \right. \qquad \Delta\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

II) Solutions en ondes planes

1) Ondes planes progressives monochromatiques

Notées OPPM ou OPPH (harmoniques)

Cas d'une OPPH se propageant dans la direction $+\vec{u}_z$:

Dans $\mathbb{C}$ $\begin{cases} \underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{j(\omega t - kz)} \\ \underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0\, e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$

$\underline{\vec{E}}_0$ amplitude complexe

k nombre d'onde (m^{-1})

ω pulsation (rad/s)

- Pourquoi plane ?

  Dans le plan z = cte, tous les points M ont les mêmes valeurs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à tout instant

- Pourquoi progressive ?

  Solution en $(\omega t - kz)$ soit en $\left(z - \frac{\omega}{k} t\right)$ soit $f\underbrace{(z - ct)}_{\text{Progressive}}$

  se déplace sans se déformer

- Pourquoi monochromatique (ou harmonique) ?

  Onde en cosinus temporel : $\underset{(\mathbb{R})}{\cos(\omega t - \dots)}$ ou $\underset{(\mathbb{C})}{e^{j\omega t \dots\dots}}$

Exemple Si $\underline{\vec{E}}_0 = E_0\, e^{j\varphi}\, \vec{u}_x$

alors $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\, e^{j(\omega t - kz + \varphi)}\, \vec{u}_x$ dans $\mathbb{C}$

$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\, \vec{u}_x$ dans $\mathbb{R}$

Si l'onde ne se propage pas selon $\vec{u}_z$, mais dans une direction quelconque, on a :

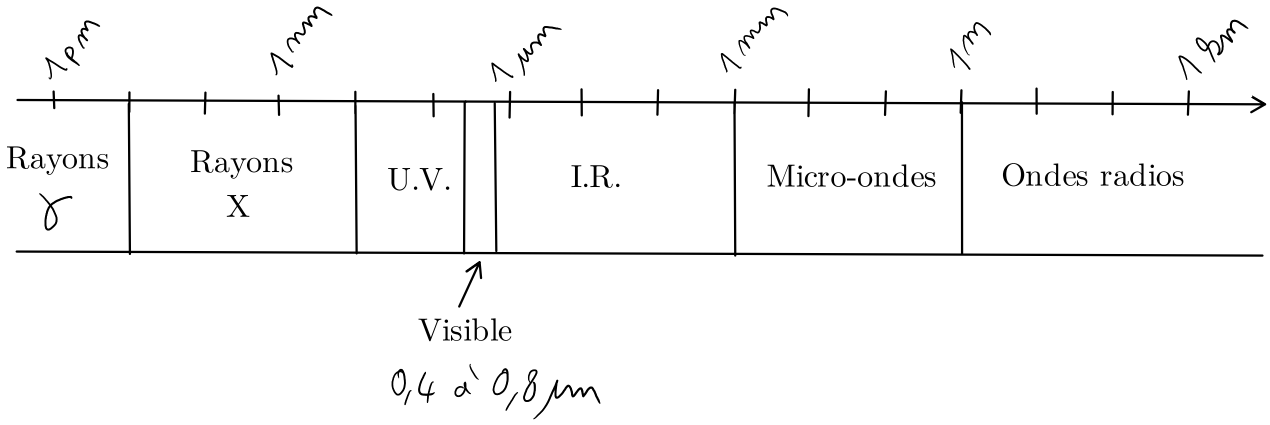
$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM})}$$

avec $\vec{k}$ le vecteur d'onde

C'est un vecteur dirigé dans la direction et le sens de propagation de l'onde, et $k = ||\vec{k}||$ est le nombre d'onde

$$\vec{k}\cdot\vec{OM} = \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \text{en } M(x,y,z)$$

2) Spectre des ondes électromagnétiques



3) Structure des OPPH

On part de $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ $\quad (\vec{r} = \vec{OM})$

soit $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underbrace{\underline{\vec{E}_0}}_{\text{cte}}\, e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ $\quad (1)$

- $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \cdot \vec{E}$

- $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

vecteur nabla

$= -jk_x \cdot E_x - jk_y E_y - jk_z E_z$ d'après (1)

donc $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -j \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{vmatrix}$

soit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}(M,t)$

Conclusion pour une OPPH :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\ldots) = j\omega \times (\ldots) \\ \vec{\nabla}\cdot(\ldots) = -j\vec{k}\,(\ldots) \end{cases}$$

Dans $\mathbb{C}$!

D'autre part, en injectant dans l'équation de d'Alembert, il vient :

$\omega^2 = k^2 c^2$ donc $\omega = kc$

Al'aide de ces ouils, nous allons réécrire les équations de Maxwell dans le cadre des OPPH (dans $\mathbb{C}$) :

	avec nabla	OPPH dans $\mathbb{C}$	Conclusion	
$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$	$-j\vec{k}.\vec{E} = 0$	$\vec{k} \perp \vec{E}$	(1)
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$	$-j\vec{k}.\vec{B} = 0$	$\vec{k} \perp \vec{B}$	(2)
$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega\vec{B}$	$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$	(3)

- (1) et (2) : $\vec{E} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{k}$ — $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$ à $\vec{k}$ donc à la direction de propagation

$\Rightarrow$ L'onde est transversale

- $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$ dans $\mathbb{C}$

Comme k est réel ici, on peur également écrire : $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$ dans $\mathbb{R}$

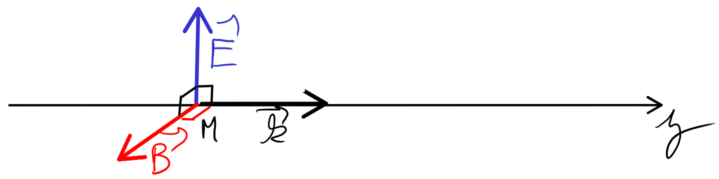
$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est donc un trièdre orthogonal direct.

Cette relation est en outre très utile pour trouver $\vec{B}$ à partir de $\vec{k}$ et $\vec{E}$ donnés.

Remarque : L'équation de Maxwell-Ampère n'a pas été utilisée car elle est redondante avec (1), (2), (3), (d'Alembert).

En effet, d'Alembert donne $\omega = kc$ et est obtenue à partir des 4 équations de Maxwell.

Remarque



$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

et $\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}$

Soit $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$ vecteur unitaire dans la direction et le sens de la propagation

On a alors : $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$

En norme $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$!

4) Notion de polarisation

Dans le cas général, le champ $\vec{E}$ (et donc $\vec{B}$ qui le suit en restant $\perp$ à $\vec{E}$)

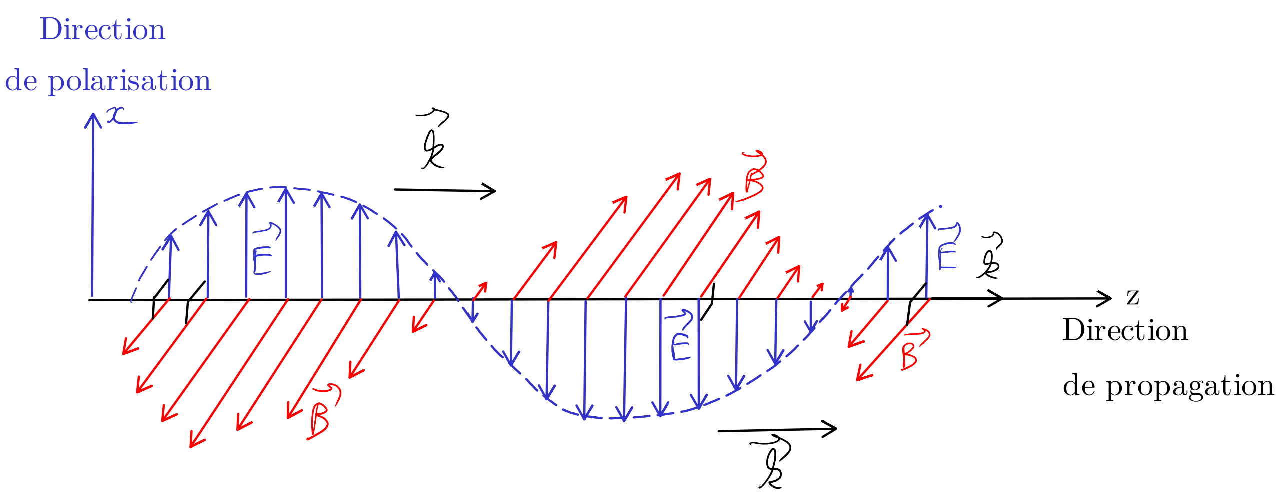
tourne autour de l'axe (Oz) en suivant une ellipse : la polarisation est dite elliptique

(cela ressemble à 1 vis sans fin qui tourne autour de son axe (Oz), avec (Oz)

la direction de propagation)

Au programme : polarisation rectiligne

oscille alors dans une seule et même direction (selon $\vec{u}_x$ sur l'illustration ci-dessous)



Par définition, on appelle direction de polarisation, la direction de $\vec{E}$

(et non pas celle de $\vec{B}$)

On a alors : (dans $\mathcal{R}$)

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - kz)$$

et donc $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \dfrac{k\vec{u}_z \wedge E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - kz)}{\omega}$

soit $\vec{B} = E_0 \dfrac{k}{\omega} \vec{u}_y \cos(\omega t - kz)$ avec $\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}$

direction de polarisation

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - kz) \\ \vec{B} = \dfrac{E_0}{c} \vec{u}_y \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

direction de propagation

$\vec{E}$ est pris comme référence de la polarisation :

ici $\vec{E}$ est polarisé selon $\vec{u}_x$ rectilignement et l'onde se propage selon $\vec{u}_z$

III) Aspects énergétiques

On admet l'équation locale de Poynting :

$$\mathrm{div}\,\vec{\Pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = -\vec{j}_c \cdot \vec{E}$$

déplacement de l'énergie — variation locale d'énergie — pertes

Dans le vide : $\vec{j}_e = 0$ donc pas de pertes :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{\Pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0}$$

Loi locale de conservation de l'énergie

(Similaire à la relation de conservation d'énergie acoustique)

Dans R uniquement

Avec $\boxed{e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}$ densité volumique d'énergie électromagnétique

et $\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$ Vecteur de Poynting = vecteur densité de courant énergétique

$\vec{\Pi}$

direction et sens de $\vec{\Pi}$ = direction et sens de déplacement de l'énergie électromagnétique

$\|\vec{\Pi}\|$: énergie se déplaçant par temps et par surface = puissance électromagnétique surfacique (W/m^2)

L'intensité de l'onde électromagnétique est $I = \|\langle\vec{\Pi}\rangle\|$ en W/m^2

Remarque : cette loi de conservation est similaire aux lois de conservation :

→ de la charge : $\mathrm{div}\,\vec{j}_c + \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = 0$

→ de la masse : $\mathrm{div}\,\vec{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$

Remarque : on a donc $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \langle e \rangle_t \cdot \vec{v}_{\text{énergie}}}$ (1)

(analogue à $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ pour le déplacement de la charge)

Il faut travailler dans $\mathbb{R}$ absolument, car il y a des produits :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \; ; \; \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \; ; \; \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Produits ! $Re(\underline{a}) \times Re(\underline{b}) \neq Re(\underline{a}.\underline{b})$

$Re(\underline{E}^2) \neq (Re(\underline{E}))^2$

$Re(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}) \neq Re(\underline{\vec{E}})\wedge Re(\underline{\vec{B}})$!

Cas de l'OPPH (Dans $\mathbb{R}$!)

- $\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c} = \vec{u}_z \wedge \frac{E(z,t)}{c}\vec{u}_x$$

- $\vec{B} = \frac{E_m}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_y$

- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u}_z$

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_m^2}{\mu_0 c}\vec{u}_z \qquad \text{or } \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

donc $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_m^2 c\,\vec{u}_z$

soit $\boxed{I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_m^2 . c}$ intensité de l'onde électromagnétique

- $\left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kz)\right\rangle$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_m^2 \qquad (2)$$

- $\left\langle \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\frac{E_m^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - kz)\right\rangle$

$$= \frac{1}{4}\frac{E_m}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_m^2 \quad \text{car } \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1 \qquad (3)$$

Il y a équipartition de l'énergie entre le champ électrique (2) et le champ magnétique (3) :

$$\left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_m^2$$

donc $$\langle e \rangle = 2 \times \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_m^2$$

Vitesse de déplacement de l'énergie ?

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle e \rangle . \vec{v}_{\text{énergie}}$$

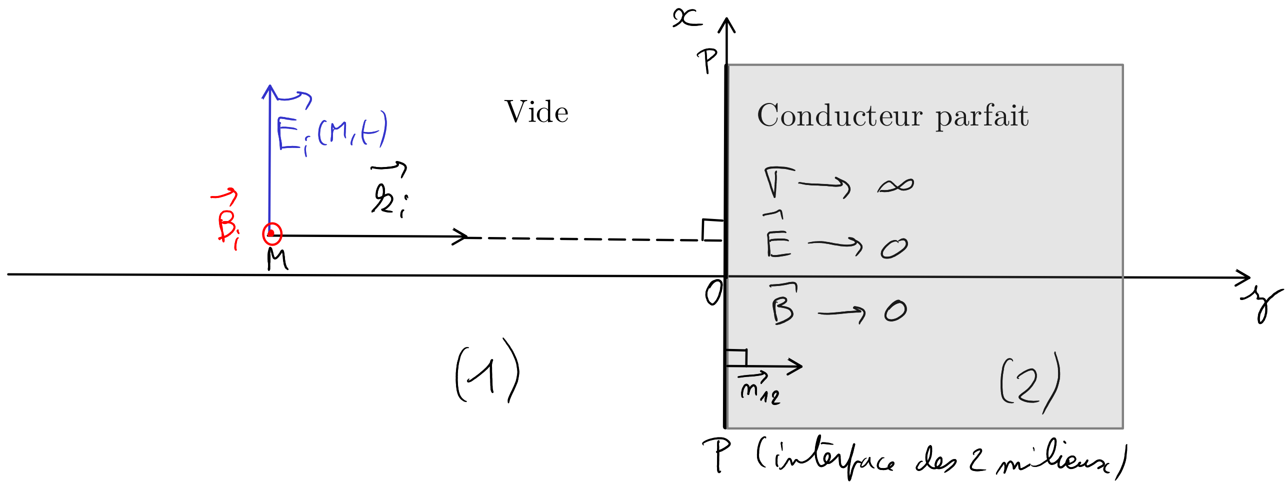
soit $$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_m^2 c \, \vec{u}_z = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_m^2 \right) . \vec{v}_{\text{énergie}}$$

soit $$\boxed{\vec{v}_{\text{énergie}} = c \, \vec{u}_z}$$

L'énergie se déplace dans le même sens et direction que l'onde $(\vec{u}_z)$ et à la vitesse c.

Dans le vide, la vitesse de déplacement de l'énergie ne dépend pas de ω.

IV) Réflexion d'une OPPH sur un plan parfaitement conducteur en incidence normale



Dans le conducteur parfait, la conductivité σ est infinie. Or : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

et j n'est pas infini, donc $\vec{E} = \vec{0}$

De plus : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $\vec{B} = \vec{0}$ (ou constante : mais ce n'est pas une onde !)

Soit $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire du milieu 1 vers le milieu 2 (ici : $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$)

Les relations de passage sont :

$$\begin{cases} \vec{E}_2(z \to 0, t) - \vec{E}_1(z \to 0, t) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} & \perp \text{ à } P \qquad (3) \\ \vec{B}_2(z \to 0, t) - \vec{B}_1(z \to 0, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} & // \text{ à } P \qquad (4) \end{cases}$$

Courant surfacique sur P

(3) $\Rightarrow$ continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$

(4) $\Rightarrow$ continuité de la composante normale de $\vec{B}$

• L'onde incidente $\vec{E}_i$ est $/\!/$ à $\mathcal{P}$ donc $\vec{E}_{i/\!/} \neq 0$ côté (1) en z = 0

Or dans le conducteur $\vec{E} = \vec{0}$. La continuité de $\vec{E}_{/\!/}$ n'est donc pas respectée !

$\Longrightarrow$ Apparition d'une onde réfléchie

• On doit aussi avoir continuité de $\vec{B}$ normal (noté $\vec{B}_\perp$)

$\vec{B}_i$ est tangentiel, donc sa composante normale est nulle. Or $\vec{B}_2$ est nul également dans le conducteur : il n'y a pas de discontinuité de $\vec{B}_\perp$, ce qui est compatible avec (4)

Ecrivons (dans $\mathbb{C}$) les 2 ondes incidente et réfléchie :

$$\begin{cases} \vec{\underline{E}}_i(z,t) = \underline{E}_0 \, \vec{u}_x \, e^{j(\omega t - kz)} \\ \vec{\underline{E}}_r(z,t) = \underline{E}_0 \cdot \underline{r} \cdot \vec{u}_x \, e^{j(\omega t + kz)} \end{cases}$$

avec $\underline{r}$ le coefficient de réflexion en amplitude

Conditions aux limites : traduisons la condition de raccordement à l'interface des 2 milieux :

$$\vec{E}_{1/\!/}(z=0,t) = \vec{E}_{2/\!/}(z=0,t) \qquad \forall t$$

donc $\vec{E}_{i/\!/}(z=0,t) + \vec{E}_{r/\!/}(z=0,t) = \vec{0} \qquad \forall t$

donc $\left(\underline{E}_0 \, e^{j\omega t} + \underline{E}_0 \underline{r} \, e^{j\omega t}\right) \vec{u}_x = \vec{0}$

donc $1 + \underline{r} = 0$ soit $\boxed{\underline{r} = -1}$

On a donc réflexion totale de l'onde incidente ($|\underline{r}| = 1$) avec une inversion (déphasage égal à π)

La somme de ces 2 ondes côté vide est :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \left(\underline{E}_0 \, e^{j(\omega t - kz)} - \underline{E}_0 \, e^{j(\omega t + kz)}\right) \vec{u}_x$$

$$= \underline{E}_0 \, \vec{u}_x \, e^{j\omega t} \left(e^{-jkz} - e^{jkz}\right)$$

$$\underline{\vec{E}_1} = \underline{E_0}\,\vec{u}_x\, e^{j\omega t}\left(-2j\sin kz\right)$$

$$= \underline{E_0}\,\vec{u}_x\, e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}\left(2\sin kz\right) \qquad \left(\text{car } -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

Dans $\mathbb{R}$: $\vec{E}_1 = 2E_0\,\vec{u}_x \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin(kz)$

avec $\underline{E_0} = E_0\, e^{j\varphi}$

donc : $$\boxed{\vec{E}_1 = 2E_0\,\vec{u}_x \sin(\omega t + \varphi)\sin(kz)}$$

t et z séparés dans 2 sinus différents :

c'est une onde stationnaire

Et $\vec{B}_1$? $\cancel{\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}_1}{\omega}}$

NON ! Ce n'est pas une OPPH

Onde stationnaire $\longrightarrow$ non progressive

On revient alors aux équations de base par calculer $\vec{B}$ à partir de $\vec{E}$:

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2E_0\sin(\omega t+\varphi)\sin kz \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = 2kE_0\cos(kz)\sin(\omega t+\varphi)\,\vec{u}_y$$

donc $$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -2kE_0\cos(kz)\sin(\omega t+\varphi)\,\vec{u}_y$$

et donc $$\vec{B}_1 = 2\underbrace{\frac{k}{\omega}}_{1/c}E_0\cos(kz)\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{u}_y$$

Finalement $\begin{cases} \vec{E}_1 = 2E_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kz)\, \vec{u}_x \\ \vec{B}_1 = 2\dfrac{E_0}{c} \cos(\omega t + \varphi) \cos(kz)\, \vec{u}_y \end{cases}$

Les noeuds $\vec{E}_1$ et les noeuds de $\vec{B}_1$ sont intercalés de $\dfrac{\lambda}{4}$

Noeud de champ $\vec{B}$ = ventre de champ $\vec{E}$

Ventre de champ $\vec{B}$ = noeud de champ $\vec{E}$

Mise en évidence d'un courant surfacique :

→ La composante normale de $\vec{B}$ est bien continue en z = 0 $(\vec{0} = \vec{0})$

→ La composante tangentielle de $\vec{B}$ (au plan P) est discontinue

La relation (4) implique donc l'apparition d'un courant surfacique $\vec{j}_s$ que nous pouvons calculer :

$$\underbrace{\vec{B}_2(0,t)}_{0} - \vec{B}_1(0,t) = \mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

$$0 - \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi) = \mu_0\, \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

donc $\boxed{\vec{j}_s = \dfrac{2}{\mu_0 c} E_0 \cos(\omega t + \varphi)\, \vec{u}_x}$

Commentaires :

- Une onde incidente arrivant sur un conducteur parfait est totatement réfléchie : $|r| = 1$
- Cette onde est déphasée de π lors de la réflexion : $\mathrm{Arg}(r) = -1$

- Il y a également apparition d'un courant surfacique $\vec{j}_s$ à la surface du conducteur

- Un miroir est un métal bon conducteur pour bien réfléchir la lumière

  Pour ne pas que le métal ne s'oxyde et donc soit moins bon conducteur
  ce qui lui fera perdre ses propriétés réfléchissantes, on lui plaque un verre
  par dessus pour le protéger)